演習 線形代数学

高知大学 理学部数学コース教員編

まえがき

理系の学生が大学初年度に学ばなくてはならない数学の分野として，微分積分学と線形代数学がある．本演習書は，そのうちの線形代数学の副読本として，高知大学理学部数理情報科学科数理科学コースの教員により作成されたものである．

本書の構成は次のようになっている．全体は大きく２部に分かれ，まず第I部で，行列と行列式を中心に，それらの平面ベクトルや空間ベクトルへの応用が扱われ，第II部では抽象的なベクトル空間が扱われている．高知大学理学部の授業では，第I部は主に基礎教育科目の数学概論IIの内容に沿っており，理系の学生諸君全体を対象にして書かれている．また第II部は数理科学コースの専門科目である線形代数学ICおよび線形代数学IICに沿っており，主に数学を専門に学ぶ学生諸君が対象になっている．各節では，まず基本的な事項についての定義と重要な定理などを証明なしで与え，その後に例題とその解答例，そして問題が続く．問題の解答は本書の最後にまとめて載せてある．

本書は５名の教員が独立に担当箇所を執筆する形で作成された．具体的には次のようになっている．まず，第I部は第１章を福間，第２章を小松，第３章を大浦，第４章を下村，そして第５章を再び福間が担当した．第II部は第６章を逸見，第７章の第３節までを小松，第４節と第８章の第１節を下村，第２節と第３節を大浦，第４節を福間が担当した．本書は各執筆者の個性を重視する形で作成された．そのため各章間で統一性を欠く箇所も見られるが，それらの内容の調整などはあえて行わなかった．たとえば，行列の成分として実数のみを考えている場合と複素数も考えている場合が混在することになったが，それもあえて調整を行うことはしなかった．同様にベクトル空間を実ベクトル空間のみを考えている場合と，複素ベクトル空間も考えている場合が混在している．

大学における数学は，高校までのそれと大きく異なっている．高校までは，定理や公式を暗記し，それを用いてどのようにうまく問題を解く

かといったことが主であるが，大学に入ると定義や定理をきちんと理解することが重要視される．定理や公式も暗記するものではなく，なぜそのようになるのかを理解することが要求される．そのため，授業では定義の説明や定理の証明などに時間をとられ，各人が授業時間に演習問題を解くといったことを行う余裕があまりない．演習問題を自ら解いてみることは，定義や定理を理解するためには重要なことなのだが，それを十分に行うことができないのが現状である．本書は，そのような問題点を補うために作成されたものである．本書を大いに活用し，線形代数学の理解を深めてもらいたい．

なお，本書の出版は，高知大学理学部長裁量経費の援助によるものであり，本書出版の趣旨にご理解を賜り，ご支援いただいた高知大学理学部長・長沼英久，副学部長・川村和夫の両先生に心から感謝の意を表す次第である．

2005 年 2 月

著者一同

第 8 刷に向けて

2005 年 3 月に初版が発行されて以来，本書は 2011 年度までの 7 年間「数学概論」および「線形代数学概論」の講義で利用されるとともに，学生の自宅学習用として活用されてきた．このたび，誤植を訂正の上，第 8 刷を発行する運びとなった．出版に際しては，これまで同様に理学部長・逸見豊先生のご理解のもと，理学部長裁量経費から援助を受けることになった．逸見学部長には心から感謝の意を表す次第である．なお，本書の出版は 2011 年度の高知大学年度計画の一環である．

2012 年 1 月

著者一同

目 次

第I部

行列と行列式

第1章　行列

定義 1.1　(1) m, n を自然数とする．mn 個の実数 a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ を次のように配置したものを m **行** n **列の行列**，もしくは $m \times n$ **行列**という.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

上記の行列 A について，a_{ij} を行列 A の (i, j) **成分**という.
　行列 A を表す際，(i, j) 成分だけを代表させて

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

もしくは

$$A = (a_{ij})_{i,j},$$

また，もっと簡単に

$$A = (a_{ij})$$

と書くことにする.
(2) $1 \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

を n 次の**行ベクトル**といい，$m \times 1$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

を m 次の**列ベクトル**という．

定義 1.2　(1) 行数と列数の等しい行列，すなわち，$n \times n$ 行列を n **次正方行列**という．
(2) n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j}$ に対して，A の (k,k) 成分 a_{kk} $(k = 1, \ldots, n)$ を A の**対角成分**という．

定義 1.3　A, B を行列とする．$A = B$ であるとは，つぎの条件を満たすときをいう．

(1) A, B とも同じ $m \times n$ 型である．

(2) 対応する (i,j) 成分がすべて等しい．

定義 1.4 (行列の和と差)　$A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする．

(1) A と B の和を

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})$$

と定義する．

(2) A と B の差を

$$A - B := (a_{ij} - b_{ij})$$

と定義する．

定義 1.5 (行列の積)　$A = (a_{ij})$ を $m_1 \times n_1$ 行列，$B = (b_{ij})$ を $m_2 \times n_2$ 行列とする．このとき，$n_1 = m_2$ の場合のみ A と B の積が定義される．その積 AB を

$$AB := \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right)$$

と定義する．ただし，$m = n_1 = m_2$ とする．

定義 1.6 (行列のスカラー倍)　$A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列，λ を実数とする．このとき，スカラー倍 λA を

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})$$

と定義する．

1.1　演算の法則

和についての法則

命題 1.7　A, B を $m \times n$ 行列とする．

(1) (交換法則) $A + B = B + A$.

(2) (和の結合法則) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

定義 1.8　すべての成分が 0 である行列を**零行列**といい，O で表す．このとき，零行列 O は次の性質をもつ．

(1) O と同じ型をもつ任意の行列 A に対して

$$A + O = O + A = A$$

が成り立つ．

(2) 行列 A に対して

$$A + X = X + A = O$$

を満たす行列 X が存在する.

(2) の行列 X を A の和に関する**逆元**という.

積についての諸法則

命題 1.9　A を $m \times n$ 行列，B を $n \times s$ 行列，C を $s \times t$ 行列とする. このとき，積の結合法則

$$(AB)C = A(BC)$$

が成立する.

定義 1.10　n を自然数とする．ここで，$i, j = 1, \ldots, n$ に対し，実数 e_{ij} を次のように定義する.

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ のとき} \\ 0, & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

n 次正方行列 $E_n = (e_{ij})$ を n 次**単位行列**という.（E_n を単に E と書くこともある.）

定義 1.11　n 次単位行列を表すのによく使われる記号とし，てクロネッカーのデルタ記号がある．クロネッカーのデルタ記号 δ_{ij} とは

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ のとき} \\ 0, & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

のことである．これを用いると

$$E_n = (\delta_{ij})$$

と書ける.

命題 1.12　m, n を自然数，E_m, E_n をそれぞれ m 次単位行列，n 次単位行列とする．このとき， 任意の $m \times n$ 行列 A に対して次が成り立つ．

$$E_m A = A,\ AE_n = A.$$

スカラー倍についての法則

命題 1.13　m,n を自然数，λ, μ を実数とする．このとき，任意の $m \times n$ 行列 A, B に対して次が成り立つ．

(1) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$

(2) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A).$

(3) $1 \cdot A = A.$

(4) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$

1.2　行列特有の性質

命題 1.14　A, B を n 次正方行列とする．このとき， 積 AB, BA が定義される．(行列の積の定義を参照せよ.）しかし，$AB = BA$ となるとは限らない．

定義 1.15　A, B を n 次正方行列とする．$AB = BA$ のとき，A と B は**可換**であるといい，$AB \neq BA$ のとき，A と B は**非可換**であるという．

命題 1.16　n 次正方行列 A, B で，$AB = O$ となるが，$A \neq O$ かつ $B \neq O$ となるものが存在する．ここで，O は $n \times n$ 型の零行列である．

定義 1.17　上記の性質を満たす A と B を**零因子**という．

定義 1.18　A, B を n 次正方行列，E_n を n 次単位行列とする．$AB = BA = E_n$ なるとき，B は A の**逆行列**（もしくは A は B の逆行列）といい，B を A^{-1}（もしくは A を B^{-1}）とかく．

命題 1.19　n 次正方行列は必ずしも逆行列をもつとは限らない．

定義 1.20　n 次正方行列 A が逆行列をもつとき，A は**正則行列**であるという．

定義 1.21 (指数)　A を n 次正方行列，k を非負整数とする．このとき

$$A^0 = E_n,\ A^1 = A,\ A^2 = A \cdot A,\ \ldots,\ A^k = A^{k-1} \cdot A$$

と定める．

命題 1.22 (指数法則)　A, B を n 次正方行列，k, l を非負整数とする．

(1) 次が成り立つ．

(1.1) $A^k A^l = A^{k+l}$.

(1.2) $(A^k)^l = A^{kl}$.

(2) 一般に，$(AB)^k = A^k B^k$ が成り立つとは限らない．

定義 1.23 (転置行列)　A を $m \times n$ 行列とし，$A = (a_{ij})$ とする．このとき，A の**転置行列** ${}^tA$ を次で定義する．

$${}^tA := (a_{ji}).$$

定義 1.24 (対称行列・交代行列)　A を n 次正方行列とする．

(1) A が**対称行列**であるとは，$A = {}^tA$ なるときをいう．

(2) A が**交代行列**であるとは，$A = -{}^tA$ なるときをいう．

定義 1.25 (べき零行列・べき等行列)　A を n 次正方行列とする．

(1) A が**べき零行列**であるとは，ある自然数 m が存在して $A^m = O$ となるときをいう．

(2) A が**べき等行列**であるとは，$A^2 = A$ となるときをいう．

定義 1.26 (上三角行列, 下三角行列)　A を n 次正方行列とし，$A = (a_{ij})$ とおく．このとき

(1) A が**上三角行列**であるとは，$i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ となるときをいう．

(2) A が**下三角行列**であるとは，$i < j$ ならば $a_{ij} = 0$ となるときをいう．

定義 1.27 (トレース)　A を n 次正方行列とし，$A = (a_{ij})$ とおく．このとき，A の**トレース** $\mathrm{tr}(A)$ とは次で定義されるものである．

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

例題 1.1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) A^2 を求めよ．

(2) A^n を求めよ．

解　(1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

以上を考えると $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となることが予想される．これを n に関する数学的帰納法で示す.

(i) $n = 1$ のときは正しい.

(ii) $n = k$ のとき正しいと仮定して $n = k + 1$ の場合を示す.

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

以上より示された.

例題 1.2

A を 3×3 行列とし，A の (i, j) 成分 a_{ij} を次のように定義する.

$$a_{ij} = i + j.$$

このとき，行列 A を書け.

解　行列 A の定義から

$$a_{11} = 1 + 1 = 2,\ a_{12} = 1 + 2 = 3,\ a_{13} = 1 + 3 = 4,$$

$$a_{21} = 2 + 1 = 3,\ a_{22} = 2 + 2 = 4,\ a_{23} = 2 + 3 = 5,$$

$$a_{31} = 3 + 1 = 4,\ a_{32} = 3 + 2 = 5,\ a_{33} = 3 + 3 = 6.$$

したがって

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

となる.

例題 1.3

次の式を行列を用いて表せ.

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 5x_2 \\ y_2 = -x_2 \\ y_3 = -x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

解　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ と書くと，A は 3×2 の行列であり，$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ である.

例題 1.4

2 次正方行列 A で，$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を満たすようなものは存在しないことを示せ.

解　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．すると

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\begin{cases} a^2+bc=0 \\ c(a+d)=0 \\ d^2+bc=0 \\ b(a+d)=1 \end{cases}$$

となる．最後の式より，$a+d \neq 0$ であることがわかるので，$c=0$ が示せる．したがって，$a=0, d=0$ となる．しかし，これは $a+d \neq 0$ に矛盾する.

問 1.1　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) $2A-3B+C$ を求めよ.

(2) $xA+yB+zC=O$ となる実数 x, y, z は，$x=0, y=0, z=0$ に限ることを示せ.

問 1.2　$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) $5X + A = -2B$ を満たす X を求めよ．

(2) $X + Y = A$, $X - Y = B$ を満たす X, Y を求めよ．

(3) $2X - 5Y = A$, $3X + 2Y = B$ を満たす X, Y を求めよ．

問 1.3　$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) A との積が定義できる行列を選び出し，その積を求めよ．

(2) B との積が定義できる行列を選び出し．その積を求めよ．

(3) E との積が定義できる行列を選び出し，その積を求めよ．

問 1.4　n 次対角行列と n 次対角行列の積は，また対角行列となることを示せ．

問 1.5　(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．このとき，$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E_2 = O$ となることを示せ．
(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，$2A^3 - 3A^2 - 7A + 3E_2$ を求めよ．

問 1.6　(i, j) 成分が $i + j$ となるような 4×3 行列を書け．

問 1.7　5 次正方行列 $A=(a_{ij})$ で次のものを書け.

(1) $a_{ij}=(-1)^{i+j}$.

(2) $a_{ij}=\begin{cases} i+j, & i<j \text{ のとき} \\ i-j, & i>j \text{ のとき} \\ 1, & i=j \text{ のとき} \end{cases}$

問 1.8　$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，次を計算せよ.

(1) $2CA-BA$

(2) $(B-3C)A-(2C+B)A$

(3) $(B+C)(B-C)A$

問 1.9　次の等式が成立するとき，a, b, c を x, y, z を用いて表せ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

問 1.10　次の式を行列を用いて表せ.

(1) $\begin{cases} y_1=2x_1-x_2+3x_3 \\ y_2=-x_1+4x_3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} y_1=3x_1-x_2 \\ y_2=-x_2 \\ y_3=x_1-3x_2 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} y_1=-2x_3 \\ y_2=3x_2 \\ y_3=-x_1 \end{cases}$

問 1.11　次の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

問 1.12　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ.

(1) $A\,{}^t\!A$ と ${}^t\!AA$ を計算せよ.

(2) $A, {}^t\!A$ を，E と I を用いて表せ.

問 1.13　n 次正方行列 A, B, C に対して，次の等式が成り立つことを示せ.

(1) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

(2) $(AB)C = A(BC)$.

(3) $A(B + C) = AB + AC$.

(4) ${}^t({}^t\!A) = A$.

(5) ${}^t(A + B) = {}^t\!A + {}^t\!B$.

(6) ${}^t(AB) = {}^t\!B\,{}^t\!A$.

問 1.14　次を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

問 1.15　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ としたとき，$AB = BA$ となるためには，a, b, c はどのような条件を満たさないといけないか．

(2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ としたとき，$AC = CA$ となるためには，a, b, c はどのような条件を満たさないといけないか．

(3) 任意の 2 次正方行列と交換可能な 2 次正方行列を求めよ．

問 1.16　$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ としたとき，次を示せ．

(1) $AB \neq BA$.

(2) $(AB)^2 = A^2B^2$.

問 1.17　n 次正方行列 A, B に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

(1) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

(2) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A)$. （ただし，$\lambda$ は実数である．）

(3) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}({}^tA)$.

(4) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

問 1.18　r を 0 でない実数とするとき，$AB - BA = rE$ を満たす n 次正方行列 A, B は存在しないことを示せ．

問 1.19　次の行列と交換可能な行列をすべて求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問 1.20　$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を計算せよ．

(2) A^n を求めよ．

問 1.21　n 次正方行列 A, X, Y に対して $AX = E_n$, $YA = E_n$ が成り立つとする．このとき，$X = Y$ となることを示せ．

問 1.22　A を任意の n 次正方行列とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $A + {}^tA$ は対称行列となることを示せ．

(2) $A - {}^tA$ は交代行列となることを示せ．

(3) A はある対称行列とある交代行列の和として書けることを示せ．

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，A を対称行列と交代行列の和で表せ．

問 1.23　次を示せ．

(1) n 次正方行列 X が対称行列でありかつ交代行列であるならば，$X = O$ である．

(2) 任意の n 次正方行列 A は対称行列と交代行列の和で書けるが，この表し方は一意的である．つまり，$A = B_1 + C_1$, $A = B_2 + C_2$（ただし，B_1, B_2 は対称行列，C_1, C_2 は交代行列）と書いたとき，$B_1 = B_2, C_1 = C_2$ となる．

問 1.24　次の問に答えよ．

(1) $1 - x^n$ を因数分解せよ．

(2) A がべき零行列であれば，$E - A$ は正則行列となることを示せ.（ただし，E は単位行列を表す.）

(3) A はべき零行列とする．$(E - A)^{-1}$ を A を用いて表せ．

問 1.25　A, B を対称行列とする．このとき，次を示せ．

(1) AB が対称行列なら $AB = BA$ となる．

(2) $AB = BA$ なら AB は対称行列となる．

問 1.26　A, B はべき零行列で，$AB = BA$ を満たしているとする．このとき，次を示せ．

(1) $A + B$ はべき零行列となる．

(2) AB はべき零行列となる．

問 1.27　A を交代行列とするとき，次の問に答えよ..

(1) A^2 は対称行列となることを示せ．

(2) A^3 は交代行列となることを示せ．

(3) 一般に，A^n はどのようになるか考察せよ．

問 1.28　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を計算せよ．

(2) A^n を求めよ．

問 1.29　$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，A^n を求めよ．

問 1.30　$\alpha \neq 0$ とする．2 次正方行列 A で $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を満たすものは存在しないことを示せ．

問 1.31　A, B を n 次正方行列とする．

(1) A, B が上三角行列なら AB も上三角行列であることを示せ．

(2) A, B が下三角行列なら AB も下三角行列であることを示せ．

問 1.32　2 次正方行列 A, B に対して，$[A, B]$ を

$$[A, B] := AB - BA$$

と定義する．このとき，次を示せ．

(1) $[A, B] = -[B, A]$.　(2) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$.

問 1.33　A が正則行列ならば ${}^tA$ も正則行列となることを示せ．

問 1.34　A は 2 次正方行列で，$A^2 - 4A + 3E_2 = O$ を満たしているとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) A は正則行列となることを示せ.

(2) A の逆行列を A を用いて表せ.

問 1.35　A, B は零行列でない n 次正方行列で，$AB = O$ を満たしているとする．このとき，A, B はいずれも正則行列にはならないことを示せ.

第2章　行列の基本変形とその応用

まず，次の連立1次方程式と行列の関係についての問題を解いてみよう．

例題 2.1

x, y, z に関する連立1次方程式

$$\begin{cases} x+y+6z &= 60 \\ 2x+3y+4z &= 90 \\ 3x+5y+3z &= 125 \end{cases}$$

を考える．このとき，下の問いに答えよ．

(1) 上の連立1次方程式の第1式の係数を第1行に，第2式の係数を第2行に，第3式の係数を第3行に，また，x の係数を第2列に，y の係数を第2列に，z の係数を第3列に配列した 3×3 行列 A を書け．また，その行列を用いて x, y, z ついて連立1次方程式を表せ．

(2) 行列 E_1 を

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例題 2.1 続き

とおく．　このとき，$B = E_1 A$ で与えられる行列 B の第 1 行と第 3 行は A と変わらず，第 2 行は A の第 2 行から，第 1 行の各成分を 2 倍したものを引いたものになっていることを，計算により確かめよ．
(3) 行列 E_2 および C を

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．　このとき，$C = E_3 E_2 B$ をみたす行列 E_3 を求めよ．
(4) 行列 D を

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，$D = E_4 C$ をみたす行列 E_4 を求めよ．
(5) (2) から (4) までに現れた行列を用いて，x, y, z を求めよ．

解

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 125 \end{pmatrix}.$

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

(3) $E_2 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & -15 \end{pmatrix}.$

E_2B の第 1 行から第 2 行を引き，第 3 行から第 2 行の 2 倍を引いたものが C だから，$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ と推測される.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C.$$

よって，$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) C の第 1 行から第 3 行の 14 倍を引き，第 2 行から第 3 行の 8 倍を加えたものが D だから，$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と推測される.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

よって，$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5) $D = E_4E_3E_2E_1A$ だから

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= D\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = E_4E_3E_2E_1A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 125 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$x = 20,\ y = 10,\ z = 5.$

この問題のように連立 1 次方程式を行列の変形を用いて解こうというのが，この章の 1 つの内容である．

2.1　行基本変形

連立 1 次方程式が次のように与えられている．

$$\begin{cases} \quad\quad 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

連立 1 次方程式の解の計算では， x_1, x_2, x_3 と $=$ を省略した拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，次のような行列の行についての 3 つの操作を行ってもよい．

(1) 2つの行を入れかえる．

(2) 1つの行にある数 c を掛けたものを，他の行に加える．

(3) 1つの行に 0 でない数 c を掛ける．

この (1)〜(3) の行に関する操作を**行基本変形** 1**〜**3 と呼ぶ．実際に，この3つの操作を行ってみる．

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 6 & 0 \end{pmatrix}
&\overset{(\text{行基本変形 } 1)}{\longrightarrow}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 3 & -8 & 6 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{(\text{行基本変形 } 2)}{\longrightarrow}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \\
&\overset{(\text{行基本変形 } 1)}{\longrightarrow}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \\
&\overset{(\text{行基本変形 } 3)}{\longrightarrow}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

このうち特に（行基本変形 1）と（行基本変形 2) を繰り返して，次の形の行列を導くことができた．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

この行列のように，左に連続して並ぶ 0 の個数が，行番号が増えるにつれて増えていくような行列を**階段行列**という．

一般に，任意の行列は（行基本変形 1）と（行基本変形 2）の操作により階段行列になおすことができる．その方法をまとめてみよう，まず，次の行列が与えられたとする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

第 1 段階　$a_{11} \neq 0$ ならばそのままでよいが，$a_{11} = 0$ のときは第 1 列の成分 $a_{21}, \ldots, a_{m1}$ に着目し, その中に 0 でないものがあるか否かを見る．もし 0 でないもの a_{i1} があるときは，第 1 行と第 i 行をいれかえる.（行基本変形 1）

その結果を再び (2.1) のように表わすと

(1)　$a_{11} \neq 0$ の場合

(2)　$a_{i1} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ の場合

の 2 つに分けることができる.

第 2 段階　ここで (1) のときは

(第 1 行)×$(-a_{11}^{-1}a_{i1})$ を (第 i 行) に加える（行基本変形 2）を行うと，第 i 行の先頭の $(i, 1)$ 成分は

$$a_{11} \times (-a_{11}^{-1}a_{i1}) + a_{i1} = -a_{i1} + a_{i1} = 0$$

となる．これを $i = 2, \ldots, m$ のすべてについて行う．任意の行列は (1), (2) の場合それぞれ次の形になる.

(1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & & B \\ 0 & & \end{pmatrix}$

第 3 段階　この操作が終了したら，次に行列 B だけに着目する．この行列 B について，上で行ったのと同じ操作をする．

以下これをくり返す．

以上のようにして到達した階段行列を一般的に表わすと次の形になる：

$$C = \begin{pmatrix} c_{1j_1} & \cdots & & & \\ & c_{2j_2} & \cdots & & \\ & & \ddots & & \\ & O & & c_{rj_r} & \cdots \\ & & & & \end{pmatrix} \quad (\text{ただし，} c_{1j_1}c_{2j_2}\cdots c_{rj_r} \neq 0).$$

ここで第 $r+1$ 行以下がすべて 0 のとき，この**階段行列 C の階数は r である**という．また，行列 A を行基本変形によって階段行列 C に直したとき，C の階数が r ならば，**行列 A の階数も r である**といい，$\mathrm{rank}\,A = r$ と表す．

与えられた行列 A を階段行列 C に直す仕方はいろいろある．しかし，C の階数はいつも同じであることが示される．

問 2.1　次の行列を,（行基本変形 1）と（行基本変形 2）によって階段行列に直せ．また，階数はいくつか．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -11 & 11 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.2　連立方程式の解法

これまでみたように連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_2 - 2x_3 & = & -4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + 6x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

を解くには，拡大係数行列に行基本変形を行えばよい．

x_1	x_2	x_3	右辺
0	2	-2	-4
1	-2	3	2
3	-8	6	0
1	-2	3	2
0	2	-2	-4
0	-2	-3	-6
1	-2	3	2
0	2	-2	-4
0	0	-5	-10
1	-2	3	2
0	1	-1	-2
0	0	1	2
1	0	0	-4
0	1	0	0
0	0	1	2

このような計算を**はき出し計算法**という.

解が存在しない場合　いままでの例では，x_1, x_2, x_3 が丁度 1 組求められたが，同じような形をしていても解が存在しない場合もある.

例 $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 8x_2 + 13x_3 = 1 \end{cases}$$

はき出し計算法を進めると，下表のようになる.

x_1	x_2	x_3	右辺
1	-2	3	2
2	-3	4	3
3	-8	13	1
1	-2	3	2
0	1	-2	-1
0	-2	4	-5
1	-2	3	2
0	1	-2	-1
0	0	0	-7

この第 3 段で止めて，この結果を連立方程式で表わすと

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ 0x_1 + x_2 - 2x_3 & = & -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & -7 \end{array}\right.$$

となる．ところが，第 3 式はどんな x_1, x_2, x_3 に対しても成り立たない．すなわち，解は存在しないことになる．

この場合は，係数行列の階数が 2 であり，拡大係数行列の階数が 3 である．一般に，

定理 2.1　連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において，係数行列の階数が拡大係数行列の階数と異なるときには，この方程式は解をもたない．

解が無数にある場合　次の場合は，解が無数にある．

例 $$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 & = & -3 \\ 3x_1 - 8x_2 + 13x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

これも同様にはき出し計算を進めると，下のようになる．

x_1	x_2	x_3	右辺
1	-2	3	-1
2	-3	4	-3
3	-8	13	-1
1	-2	3	-1
0	1	-2	-1
0	-2	4	2
1	-2	3	-1
0	1	-2	-1
0	0	0	0
1	0	3	-3
0	1	-2	-1
0	0	0	0

最後の結果を式で表わすと

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & -3 \\ x_2 - 2x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

であり，これを満たす x_1, x_2, x_3 は，x_3 を任意に与え（$= \alpha$ とする）

$$x_1 = \alpha - 3,\ x_2 = 2\alpha - 1,\ x_3 = \alpha \quad (\alpha \text{ は任意})$$

ということになる．

この場合は，未知数の個数が 3 であるのに対して，係数行列と拡大係数行列の階数はともに 2 である．

例 $$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 & = & 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 & = & 3 \end{array}\right.$$

下表のように，はき出し計算を進めると

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
1	1	-2	1	3	1
2	-1	2	2	6	2
3	2	-4	-3	-9	3
1	1	-2	1	3	1
0	-3	6	0	0	0
0	-1	2	-6	-18	0
1	1	-2	1	3	1
0	1	-2	0	0	0
0	0	0	-6	-18	0
1	1	-2	1	3	1
0	1	-2	0	0	0
0	0	0	1	3	0
1	0	0	0	0	1
0	1	-2	0	0	0
0	0	0	1	3	0

最後に得られた結果は

$$x_1 = 1, x_2 - 2x_3 = 0, x_4 + 3x_5 = 0$$

を示している，そこで，$x_3(=\alpha), x_5(=\beta)$ を任意に与えて，次の解を得る．

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2\alpha,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = -3\beta,\ x_5 = \beta \quad (\alpha,\ \beta\text{は任意})$$

この場合は，$\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}(A\ \boldsymbol{b}) = 3$ である．

定理 2.2　連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において，未知数の個数が n で $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(A\ \boldsymbol{b}) = r$ のときには，$n - r$ 個の未知数のとる値を任意に与えることができる．

2.3　逆行列の決定

基本行列　行列に対する行基本変形を行列の積ということで見直してみよう．A を $m \times n$ 行列とする．

(1) 次の行列は，単位行列 E に（行基本変形 1）を行ったもの．

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

積 $E_1 A$ をつくると，行列 A に（行基本変形 1）を行ったものになる．

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

（第 2 行，第 3 行の入れかえ）

(2) 次の行列は，単位行列 E に（行基本変形 2）を行ったもの．

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & c & \cdots & 1 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad （これは\ i < j\ のとき）$$

積 E_2A をつくると，行列 A に（行基本変形2）を行ったものになる．

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{11} + a_{21} & ca_{12} + a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

（A の第1行を c 倍したものを，第2行に加える）

問 2.2　$i > j$ のとき，E_2 はどのように書けばよいか.

(3) 次の行列は，単位行列 E に（行基本変形3）を行ったもの.

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & O & \\ & & c & & \\ & O & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ここでも E_3A をつくると，A に（行基本変形3）を行ったものになる.

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ ca_{31} & ca_{32} \end{pmatrix}.$$

そこで，行列 A に行基本変形を行うということは，E_1, E_2, E_3 のような行列を左から何個か掛けることにほかならない.

ここで，E_1, E_2, E_3 はどれも逆行列をもつ，すなわち，正則である．事実，$E_1^{-1} = E_1$, E_2^{-1} は c を $-c$ にかえたもの，E_3^{-1} は c を c^{-1} にかえたものとなる.

問 2.3 このことを $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\c&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$ のおのおのについて確かめよ.

以上のことを用いて，逆行列を求めることができる.

例題 2.2

$A = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

解 まず，行列

$$(E\ A) = \begin{pmatrix}1&0&0&1&2&3\\0&1&0&2&4&5\\0&0&1&3&5&6\end{pmatrix}$$

をつくり，これに行基本変形を行って，最下段のように右側が単位行列のような行列へ導く.

$$\begin{array}{rrr|rrr}
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-3 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
-5 & 0 & 2 & 1 & 0 & -3 \\
-3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
-3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

行基本変形を行うということは，左から E_1, E_2, E_3 をいくつか掛けることである．その掛けた行列をまとめて P で表わすと，最下段の結果は

$$\text{行列の積 } P \cdot (E\ A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られたことを示している．ところが

$$P \cdot (E\ A) = (P\ PA) \ \text{(3 次行列を 2 個並べた } 3 \times 6 \text{ 型行列であることに注意)}$$

であるから

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

P は，正則行列 E_1, E_2, $_3$ のいくつかの積であるから正則行列のはずである．そして，$PA = E$ は，A が P の逆行列であることを表わしている．したがって，$AP = E$ でもある．よって，A の逆行列は，P である．

正則であるための条件　ところが，n 次行列 A は，逆行列をもつとは限らない．そのようなときは，前の例題ような計算をすると，どんなことになるであろうか．

例題 2.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$ が正則か否かを調べる．

解　まず，下のようにはき出し計算を進める．

	E			A	
1	0	0	1	-3	2
0	1	0	4	1	0
0	0	1	-1	-10	6
1	0	0	1	-3	2
-4	1	0	0	13	-8
1	0	1	0	-13	8
1	0	0	1	-3	2
-4	1	0	0	13	-8
-3	1	1	0	0	0

すると，階段行列になった 3 段目の所で第 3 行の右半分の成分がすべて 0 になってしまう．これ以上はき出し計算を続けても，右半分を単位

行列にすることはできない．上の 3 段目は，$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $QA = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 13 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ということである．もし，A が逆行列 A^{-1} をもてば，$QA \cdot A^{-1} = Q$ となる．ところが，上の QA の右から A^{-1} を掛けたとき，第 3 行の成分はやはり 0 だけである．これは Q の成分に矛盾するのである．

ここで，例題 2.2 と 2.3 について，はき出し計算の 3 段目をみよう．

例題 2.2 では 3 段目まできて，A の階数が 3 であることが分かる．そして，3 段目までくれば，4 段目，5 段目と導けることは確かである．これに対して例題 2.3 では，3 段目まできて A の階数が 2 である．これは 3 次の場合に限ったことではない．すなわち

定理 2.3　n 次正方行列 A が正則であるための必要十分条件は，

$$\mathrm{rank}\ A = n$$

である．

2.4　逆行列と連立 1 次方程式

ここで，未知数の個数 n が式の個数 n に等しい場合をもう一度考える．すなわち，連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

において，A が n 次正方行列の場合である．

いままでのことから

- rank$A$ <rank$(A\ \boldsymbol{b})$　なら，解なし
- rank$A$ =rank$(A\ \boldsymbol{b}) = r$　のときは，$n - r$ 個の未知数を自由に与えうる

を知った．特に

$$\text{rank } A = n$$

のときは，解はただ１組である．ところが，これは丁度 A が逆行列 A^{-1} をもつ場合にあたる．そして，A^{-1} を上の連立１次方程式に左から掛けると

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

となり，これが解である．

このことをはき出し計算に結びつけて説明すると，次のようになる．下図は連立１次方程式の計算と逆行列の計算を一緒にして記号的に書いたものである．

$$\begin{array}{c|lr} E & A & \boldsymbol{b} \\ \hline & \cdots & \\ \hline A^{-1} & E & \boldsymbol{x} \end{array}$$

A に行基本変形を行って（基本行列を左からかけて）E に達したとき，

E は A^{-1} に達し，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{x}$ に達する．

そして，行基本変形を行ったということは，$A^{-1}\boldsymbol{x}$ ということである．すなわち，

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

同次連立１次方程式　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, すなわち

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = 0 \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \cdots & +a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right.$$

を**同次連立１次方程式**という．この場合

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

は解である．しかし，これ以外の解をもつことがある．

例 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ \quad 17x_2 - 5x_3 &= 0 \end{cases}$

x_1	x_2	x_3	右辺
2	−3	1	0
3	4	−1	0
0	17	−5	0
2	−3	1	0
0	$\frac{17}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0
0	17	−5	0
2	−3	1	0
0	17	−5	0
0	0	0	0
1	0	$\frac{1}{17}$	0
0	1	$-\frac{5}{17}$	0
0	0	0	0

この連立 1 次方程式の解は，$x_3 = \alpha$ を任意に与えて

$$x_1 = -\frac{1}{17}\alpha,\ x_2 = \frac{5}{17}\alpha,\ x_3 = \alpha$$

である．したがって，$\alpha = 0$ にとれば $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ であるが，そのほか，無数の解をもつことになる．

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ を上の同次連立 1 次方程式の**自明な解**といい，上で $\alpha \neq 0$ にとったときのような，それ以外の解を**非自明な解**という．

定理 2.4　同次連立 1 次方程式が非自明な解をもつための必要十分な条件は，$\mathrm{rank}\,A < n$，すなわち，A が逆行列をもたないことである．

問 2.4　$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ について，第 1 行の -3 倍を第 2 行に加える操作と，第 2 行の 2 倍を第 1 行に加える操作を考える．操作の順序によって結果がどう変わるか計算せよ．
（注：この 2 つの操作を同時に行うことはできない．必ずどちらかを先に行うのか意識しなくてはならない.）

問 2.5　行列 A に対して基本行列を右からかけると行列はどう変化するか．基本行列を列ベクトルに分割することにより考察せよ．

問 2.6　次の行列を行基本変形によって階段行列にせよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -11 & -6 & 1 \\ 2 & -2 & -8 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & -5 & 1 \\ -2 & 2 & 8 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

問 2.7　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -1 & a \end{pmatrix}$ の階数が 2 になるような a を求めよ．

問 2.8　行列 $\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．ただし，a は実数の定数とする．

問 2.9　次の連立１次方程式を解け（解が存在しない場合は「解なし」と答えよ）．

$$(1)\ \begin{cases} x+3y+4z=1 \\ 3x+7y+10z=2 \\ 5x-y+4z=3 \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} 2x+3y+4z+2w=-1 \\ x+2y-z+w=3 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x+3y+4z=1 \\ 3x+7y+10z=2 \\ 5x-y+4z=-3 \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} x+2y+3z+4w=1 \\ 2x+3y+4z+5w=-1 \\ 3x+4y+5z+6w=1 \end{cases}$$

問 2.10　a, b, c, d を定数とする．次の連立１次方程式がただ１つの解をもつための (a,b,c,d) についての条件を求めよ．

$$\begin{cases} ax-by-az+bw=0 \\ bx+ay-bz-aw=0 \\ cx-dy+cz-dw=1 \\ dx+cy+dz+cw=0 \end{cases}$$

問 2.11　$x,\ y,\ z,\ w$ を変数，$a,\ b$ を定数とする次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} 2y+4z+2w=2 \\ -x+y+3z+2w=2 \\ x+2y+3z+w=b \\ -2x-y+aw=1 \end{cases}$$

問 2.12　次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} 2x+5y+5z+3w=7 \\ 3x+4y+2z+w=5 \\ x+4y+2z+3w=3 \end{cases}$$

問 2.13　行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -a \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ は正則か．そうならば逆行列を求めよ.

問 2.14　行列 $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則か．そうならば逆行列を求めよ.

問 2.15　行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

問 2.16　行列 $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

問 2.17　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

第3章　行列式

3.1　行列式の定義

公式 3.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

定義 3.2　1 から n までの数の順列 $(p, q, \ldots, s)$ について，2 つの数の交換を 1 回と考えて偶数回の交換で $(1, 2, \ldots, n)$ とできるとき，これを**偶順列**，奇数回かかるとき**奇順列**という．

定義 3.3　一般の行列式は，次で定義される．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1p}a_{2q}\cdots a_{ns}.$$

ただし，係数の符号は順列 $(p, q, \ldots, s)$ の符号である．

問 3.1　次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

問 3.2　次の順列は偶順列か奇順列か答えよ.

(1) $(1,2,4,3)$　(2) $(3,1,2,4)$　(3) $(3,4,1,2)$　(4) $(2,3,4,1)$

問 3.3　$A=(a_{ij})$ を 4 次正方行列とする．行列式 $|A|$ において，次の係数につける符号はなにか.

(1) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$　(2) $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$　(3) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$

問 3.4　次の等式を証明せよ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

さらに一般に次の等式が成り立つことを説明せよ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

問 3.5　次の行列式を展開せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$

問 3.6　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} ka_{11} & & & \\ & ka_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & ka_{nn} \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} & & & a_{1,n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n,1} & & & \end{vmatrix}$

3.2　行列式の性質

定理 3.4　行列 A の成分を主対角線について対称に入れ換えても，行列式の値は変わらない．すなわち，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

定理 3.5　行列 A で 2 つの列（あるいは 2 つの行）を入れ換えると，行列式の値は符号がかわる．例えば,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

定理 3.6　行列式は，1 つの列（あるいは行）について加法性をもつ．例えば,

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

定理 3.7　行列 A の1つの列（あるいは1つの行）を k 倍すると，行列式の値も k 倍となる．例えば,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

定理 3.8　行列 A の1つの列（あるいは行）に，別の列（あるいは行）にある数を掛けたものを加えても，行列式の値は変らない．例えば,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

定理 3.9　2つの列（あるいは2つの行）が等しい行列式の値は 0 である．例えば,

$$\begin{vmatrix} a & a & a_{13} \\ b & b & a_{23} \\ c & c & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

例題 3.1

次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\
(\text{第 3 行の 2 をくくりだす}) &= 2\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
(\text{第 3 列の } -2 \text{ 倍を第 1 列に加える}) &= 2\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
(\text{第 1 行と第 2 行を入れ換える}) &= -2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-2)\cdot 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -18.
\end{aligned}
$$

問 3.7　次の等式を示せ.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.　(2) $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

問 3.8　次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

問 3.9　次の行列式の値を求めよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ kl & l & l \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} k & l & m \\ l & m & k \\ k+l & l+m & m+k \end{vmatrix}$$

問 3.10　次の行列式の値を求めよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} 12 & 4 & 8 \\ 7 & 7 & 4 \\ 15 & 20 & 10 \end{vmatrix} \qquad (4)\ \begin{vmatrix} 1/2 & 1/4 & 2/3 \\ 1/2 & 5/6 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \end{vmatrix}$$

$$(5)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (6)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (7)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(8)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \qquad (9)\ \begin{vmatrix} 3 & -4 & -6 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \qquad (10)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(11)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad (12)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 4 & 0 & 6 \\ -3 & 5 & -6 & 0 \end{vmatrix} \qquad (13)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

問 3.11　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とおき，$|A| = |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3|$ とおく．次の行列式を $|A|$ を用いて表せ.

(1) $|\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3|$　(2) $|\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2|$　(3) $|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3|$
(4) $|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1|$

問 3.12　$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ のとき，次の行列式の値を $|A|$ を用いて表せ.

(1) $\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{13} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{23} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{33} & ka_{32} \end{vmatrix}$

問 3.13　A を n 次正方行列としたとき，$|kA|=k^n|A|$ が成り立つことを説明せよ。

3.3　余因子展開

定義 3.10　n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ において第 i 行，第 j 列を取り去って得られた $(n-1)$ 次行列 D_{ij} の行列式を A の $(n-1)$ 次**小行列式**という．また，これに符号 $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを A の (i,j) **余因子**といい，A_{ij} で表す．すなわち，$A_{ij}=(-1)^{i+j}|D_{ij}|$.

定理 3.11 (余因子展開)　n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の行列式について，次の展開式が成り立つ.

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \\ &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}. \end{aligned}$$

第 1 式の展開を**第 j 列に関する余因子展開**，第 2 式の展開を**第 i 行に関する余因子展開**という.

例題 3.2

次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解　第 1 行について余因子展開すると,

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3(-1) + 0 + 5 \cdot 3 \\ &= 12. \end{aligned}$$

問 3.14　次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(8) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$　(9) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$　(10) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

問 3.15　数学的帰納法および余因子展開を用いて

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)n/2} a_1 a_2 \cdots a_n$$

を示せ.

3.4　行列式と逆行列

定理 3.12　3 次正方行列 $A = (a_{ij})$ において $|A| \neq 0$ のとき，A は逆行列 A^{-1} をもち

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

で与えられる．ここで，A_{ij} は A の (i,j) 余因子を表す.

例題 3.3

次の行列が逆行列をもてば，それを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

解　$|A| = 12$ であるので，A は逆行列をもつ．

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

同様に残りの余因子も計算すると，

$$A_{12} = -1,\ A_{13} = 3,\ A_{21} = 10,\ A_{22} = -2,$$
$$A_{23} = -6,\ A_{31} = -5,\ A_{32} = 7,\ A_{33} = 3.$$

よって

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 & 10 & -5 \\ -1 & -2 & 7 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

※ 得られた行列が逆行列になっていることを確かめる癖をつけたい．いまの場合，

$$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 & 10 & -5 \\ -1 & -2 & 7 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，得られた行列は確かに逆行列である．

問 3.16　次の行列が逆行列をもてば，それを求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.5　連立１次方程式への応用

定理 3.13 (クラメルの公式)　連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

の係数行列を $A = (a_{ij})$ とする．$|A| \neq 0$ ならばこの連立１次方程式は唯一つの解をもち，それは

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

で与えられる．

例題 3.4

次の連立１次方程式を解け.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

解　係数行列 A の行列式の値は

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

なので，クラメルの公式を利用する．

$$x_1 = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3},$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{20}{3}.$$

以上から，$x_1 = -4,\ x_2 = -\frac{1}{3},\ x_3 = \frac{20}{3}$.

※ クラメルの公式により得られた解が与えられている方程式を満たしていることを確かめる癖をつけたい．いまの場合,

$$-4 + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{20}{3} = 2,$$

$$3\cdot(-4) + \left(-\frac{1}{3}\right) + 2\cdot\frac{20}{3} = 1,$$

$$(-4) - \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{20}{3} = 3.$$

問 3.17　次の連立 1 次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

3.6　行列の積の行列式

定理 3.14　n 次正方行列 A, B について，次の等式が成り立つ．

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

定理 3.15　n 次正方行列 A が逆行列 A^{-1} をもつための必要十分条件は，$|A| \neq 0$ であり，このとき，$|A^{-1}| = |A|^{-1}$ である．

問 3.18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

を利用して，等式

$$(ad-bc)(xw-yz) = (ax+bz)(cy+dw) - (ay+bw)(cx+dz)$$

を示せ．また，

$$(a^2-b^2)(x^2-y^2) = (ax+by)^2 - (ay+bx)^2$$

を示せ．

問 3.19　n 次正方行列 A と正則な n 次正方行列 P に対して，次の等式を示せ．

$$|xE - A| = |xE - P^{-1}AP|.$$

問 3.20　A, B を n 次正方行列とし，B は正則とする．このとき，次の等式を示せ．

$$|xE - AB| = |xE - BA|.$$

なお，この等式は B が正則でない場合も成り立つ．

第4章　ベクトルと計量—座標幾何への応用

4.1　平面ベクトル，空間ベクトル

この章では平面，空間のベクトルを取り上げる．

定義 4.1 (平面，空間のベクトル)　平面または空間の2点 A, B を結ぶ向きをつけた線分を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表し，次の3つの条件が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と書く．

(1) $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$. 以後，$\mathrm{AB} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ と書き，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**大きさ**という．

(2) $\mathrm{AB} \,/\!/\, \mathrm{CD}$. （ここの AB, CD は線分を表している.）

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は同じ向き．

この同値類を $\boldsymbol{a}$ で表し，**ベクトル**と呼び，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ や $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\boldsymbol{a}$ の**代表ベクトル**と呼ぶ．簡単のため，同値類と代表ベクトルを同一視して，

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

などと書く．

定義 4.2 (平面，空間のベクトルの和)　2つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の代表ベクトルをうまく選んで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とするとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**和** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}(= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}) = \overrightarrow{\mathrm{AC}}(\text{が代表するベクトル})$$

と定義する.

定義 4.3 (平面，空間のベクトルの零ベクトルと逆ベクトル)　**零ベクトル** $\mathbf{0}$ と**ベクトル** $\boldsymbol{a}$ **の逆ベクトル** $-\boldsymbol{a}$ は代表ベクトルを適当に選んで，それぞれ

$$\mathbf{0} = \overrightarrow{\mathrm{AA}}, \quad -\boldsymbol{a}(= -\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

と定義する．このとき，ベクトルの**差** $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$$

と定義する.

定義 4.4 (平面，空間のベクトルのスカラー倍)　ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と正の実数 k が与えられたとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と向きが同じで大きさが k 倍のベクトルを $k\boldsymbol{a} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く．このとき，すべての実数 k に対して $k\boldsymbol{a}$ を

$$k\boldsymbol{a} = \begin{cases} k\boldsymbol{a}, & k > 0 \\ \mathbf{0}, & k = 0 \\ (-k)(-\boldsymbol{a}), & k < 0 \end{cases}$$

と定義し，これを **スカラー** k **によるベクトル** $\boldsymbol{a}$ **のスカラー倍**と呼ぶ.

定理 4.5 (ベクトル空間)　平面，空間のベクトル全体はベクトル空間になる．すなわち，下の 8 つの性質を満たす.

(1) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

(2) 「すべての $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$」となる $\mathbf{0}$ がある.

(3) すべての $\boldsymbol{a}$ に対して「$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{b}(= -\boldsymbol{a})$」がある.

(4) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

(5) $(k\ell)\boldsymbol{a} = k(\ell\boldsymbol{a})$.

(6) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

(7) $(k+\ell)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{a}$.

(8) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$.

定義 4.6 (平面，空間のベクトルの内積)　ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ を

$$\theta = \angle \mathrm{AOB}$$

と定義する．このとき，**ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$** を

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

と定義する．

系 4.7　$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$, $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$．さらに，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{b}$ のとき，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

定理 4.8　定理 4.6 で定義した平面，空間のベクトルの内積は，内積である．すなわち，次の 3 つの性質を満たす．

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$.

(2) $k\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$.

(3) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$.

定理 4.9　平面上のベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は，3 点 O, A, B が同一直線上にないことである．

また，空間上のベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は，3 点 O, A, B, C が同一平面上にないことである．

定理 4.10　平面上のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が 1 次独立であるなら，この平面内の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ により一意的に**線形表示**される．すなわち，

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$$

となる実数 x, y がただ一組存在する．

また，空間上のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立であるなら，この平面内の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ により一意的に**線形表示**される．すなわち，

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$$

となる実数 x, y, y がただ一組存在する．

4.2　ベクトルの成分表示

定義 4.11 (成分表示)　平面上の大きさが 1 で互いに直交する 2 つのベクトル $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ を一組決めて，これを **平面上の基本ベクトル**と呼ぶ．定理 4.10 により，任意のベクトルは $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e} + y\boldsymbol{f}$ と表せる．このとき，

$$\boldsymbol{x} = (x, y)$$

と書き，これを $\boldsymbol{x}$ **の成分表示**という．

空間上の大きさが 1 で互いに直交する 3 つのベクトル $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ を一組決めて，これを**空間上の基本ベクトル**と呼ぶ．定理 4.10 により，任意のベクトルは $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e} + y\boldsymbol{f} + z\boldsymbol{g}$ と表せる．このとき，

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z)$$

と書き，これを $\boldsymbol{x}$ **の成分表示**という．

4.3　座標幾何への応用

定理 4.12 (直線の方程式，平面の方程式)　点 P_0 を通り，方向ベクトルが $\boldsymbol{l}$ の直線の方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = t\,\boldsymbol{l} \quad (t \in \mathbb{R})$$

で与えられる．特に，座標と成分表示を $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$, $\mathrm{P}(x, y)$, $\boldsymbol{l} = (l, m)$ とすると，平面での直線の方程式

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}$$

が得られ，$lm \neq 0$ のとき，これから変数 t を消去して平面の直線の方程式

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

が得られる．

　次に，座標と成分表示を $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathrm{P}(x, y, z)$, $\boldsymbol{l} = (l, m, n)$ とすると，空間での直線の方程式

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

が得られ，これから $lmn \neq 0$ のとき，変数 t を消去して空間の直線の方程式

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

が得られる．

定義 4.13　上の定理で t を**媒介変数**，$\boldsymbol{l}$ の成分 (l, m), (l, m, n) を**方向係数**と呼ぶ．特に，方向係数が $l^2 + m^2 = 1$, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ を満たすとき，その方向係数を**方向余弦**と呼ぶ．

定義 4.14　平面の中の直線 l に垂直な (系 4.7 参照) ベクトル $\boldsymbol{n}$ を**直線** l **の法線ベクトル**という．空間の中の平面 π を考えるときは，π に含まれるすべての直線に垂直なベクトル $\boldsymbol{n}$ を**平面** π **の法線ベクトル**という．

定理 4.15 (法線ベクトルと直線の方程式，平面の方程式)　平面で，点 P_0 を通る直線 l の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と書くと，直線 l 上の点を P と書けば

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = 0$$

を満たすので，これも平面での直線 l の方程式を与える．座標と成分表示を $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$, $\mathrm{P}(x, y)$, $\boldsymbol{n} = (a, b)$ とすると，xy 平面での直線の方程式

$$ax + by - (ax_0 + bx_0) = 0$$

が得られる．

空間で，点 P_0 を通る平面 π の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と書くと，平面 π 上の点を P と書けば

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = 0$$

を満たすので，これは空間における平面 π の方程式を与える．座標と成分表示を $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathrm{P}(x, y, z)$, $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ とすると，xyz 空間での平面の方程式

$$ax + by + cz - (ax_0 + bx_0 + cz_0) = 0$$

が得られる．

4.4　空間ベクトルの外積

定義 4.16 (空間ベクトルの外積)　空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を右手の人差し指と中指の方向のベクトルとし，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直で，長さが $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積である親指方向のベクトルを $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と書き，$\boldsymbol{a}$ **と** $\boldsymbol{b}$ **の外積**と呼ぶ．

定理 4.17　外積に対して，次が成り立つ：

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

(2) $k\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times k\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

(3) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$.

定理 4.18　空間上の基本ベクトル $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ に対して，次が成り立つ．ただし，$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ は右手系とする．

(1) $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g} = 0$.

(2) $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f} = -\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{g}$.

(3) $\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g} = -\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}$.

(4) $\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}$.

例題 4.1

平面上のベクトルを $\boldsymbol{p} = (a, b)$, $\boldsymbol{q} = (x, y)$ と成分表示したとき，内積 $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$ は

$$(a, b) \cdot (x, y) = ax + by$$

となる．
空間上のベクトルを $\boldsymbol{p} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{q} = (x, y, z)$ と成分表示したとき，内積 $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$ は

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz$$

となる．

解　先ず，平面のときを考える．基本ベクトル $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ は大きさが 1 だから，系 4.7 により，

$$1 = |\boldsymbol{e}|^2 = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}, \quad 1 = |\boldsymbol{f}|^2 = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{f}$$

である．また，直交するので，

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f} = |\boldsymbol{e}||\boldsymbol{f}|\cos 90^\circ = 0.$$

$\boldsymbol{p} = (a, b)$, $\boldsymbol{q} = (x, y)$ だから，

$$\boldsymbol{p} = a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{q} = x\boldsymbol{e} + y\boldsymbol{f}.$$

よって，上の式から

$$\begin{aligned} (a, b)\cdot(x, y) &= \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = (a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{f})\cdot(x\boldsymbol{e} + y\boldsymbol{f}) \\ &= ax\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e} + ay\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f} + bx\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{e} + by\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{f} = ax + by. \end{aligned}$$

次に，空間のときを考える。基本ベクトル $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ は大きさが 1 だから，系 4.7 により，

$$1 = |\boldsymbol{e}|^2 = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}, \quad 1 = |\boldsymbol{f}|^2 = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{f}, \quad 1 = |\boldsymbol{g}|^2 = \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{g}$$

である．また，互いに直交するので，

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f} = |\boldsymbol{e}||\boldsymbol{f}|\cos 90^\circ = 0,\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g} = |\boldsymbol{f}||\boldsymbol{g}|\cos 90^\circ = 0,\ \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{e} = |\boldsymbol{g}||\boldsymbol{e}|\cos 90^\circ = 0.$$

$\boldsymbol{p} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{q} = (x, y, z)$ だから，

$$\boldsymbol{p} = a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{f} + c\boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{q} = x\boldsymbol{e} + y\boldsymbol{f} + z\boldsymbol{g}.$$

よって，上の式から

$$\begin{aligned} (a, b, c)\cdot(x, y, z) &= \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = (a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{f} + c\boldsymbol{g})\cdot(x\boldsymbol{e} + y\boldsymbol{f} + z\boldsymbol{g}) \\ &= ax\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e} + ay\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f} + az\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{g} \\ &\qquad + bx\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{e} + by\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{f} + bz\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g} \\ &\qquad\quad + cx\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{e} + cy\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{f} + cz\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{g} \\ &= ax + by + cz. \end{aligned}$$

問 4.1 平面上のベクトル $\boldsymbol{p} = (a, b)$, $\boldsymbol{q} = (x, y)$ のなす角を θ とするとき,

$$\cos\theta = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2}}$$

を示せ.

問 4.2 空間上のベクトル $\boldsymbol{p} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{q} = (x, y, z)$ のなす角を θ とするとき,

$$\cos\theta = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

を示せ.

問 4.3 平面上のベクトルを $\boldsymbol{p} = (a, b)$, $\boldsymbol{q} = (x, y)$ とするとき, $|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}|$ を a, b, x, y を用いて表せ.

問 4.4 空間上のベクトルを $\boldsymbol{p} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{q} = (x, y, z)$ とするとき, $|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}|$ を a, b, c, x, y, z を用いて表せ.

問 4.5 平面上のベクトル $\boldsymbol{p} = (a, b)$, $\boldsymbol{q} = (x, y)$ が垂直であるための条件を a, b, x, y を用いて表せ.

問 4.6 空間上のベクトル $\boldsymbol{p} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{q} = (x, y, z)$ が垂直であるための条件を a, b, c, x, y, z を用いて表せ.

問 4.7 平面上のベクトルを $\boldsymbol{p} = (1, 0)$, $\boldsymbol{q} = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$ とするとき, $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ のなす角を求めよ.

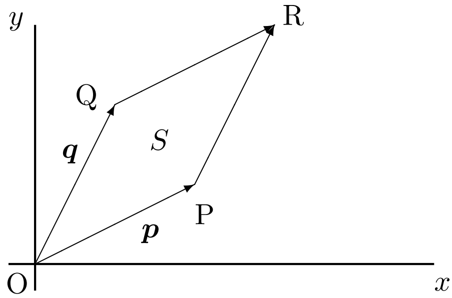
問 4.8 空間上のベクトルを $\boldsymbol{p} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{q} = (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 2)$ とするとき, $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ のなす角を求めよ.

例題 4.2

平面上の2つのベクトル $\boldsymbol{p} = (a, b)$, $\boldsymbol{q} = (x, y)$ の作る平行四辺形の面積 S は

$$S = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \right|$$

で与えられる.



解 例題の図の平行四辺形 OPRQ の面積 S を求めればよい. 平行四辺形の面積の公式から

$$S = \mathrm{OP} \times \mathrm{OQ} \times \sin \angle \mathrm{POQ}.$$

問 4.1 より,

$$\cos \angle \mathrm{POQ} = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2}}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
\sin^2 \angle \mathrm{POQ} &= 1 - \cos^2 \angle \mathrm{POQ} \\
&= 1 - \frac{(ax + by)^2}{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} = \frac{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2}{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \\
&= \frac{a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2}{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} = \frac{(ay - bx)^2}{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}.
\end{aligned}$$

$\sin\angle\mathrm{POQ}$ は正なので，$\sqrt{(ay-bx)^2}=|ay-bx|$ に注意して，

$$\sin\angle\mathrm{POQ}=\frac{|ay-bx|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

問 4.3 より，

$$\mathrm{OP}=|\boldsymbol{p}|=\sqrt{a^2+b^2},\quad \mathrm{OQ}=|\boldsymbol{q}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

だから，

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{x^2+y^2}\times\frac{|ay-bx|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= |ay-bx| = \left|\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}\right|. \end{aligned}$$

問 4.9　$\mathrm{P}_1(x_1,y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2,y_2)$, $\mathrm{P}_3(x_3,y_3)$ とおくとき，これらを頂点とする平行四辺形は 4 通り考えられるが，その面積はどれも

$$\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

となることを示せ.

問 4.10　3 点 A$(1,-3)$, B$(-2,2)$, C$(3,-1)$ のとき，$\triangle$ABC の面積を求めよ.

問 4.11　3 点 $\mathrm{P}_1(x_1,y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2,y_2)$, $\mathrm{P}_3(x_3,y_3)$ が一直線上にあるための必要十分条件は，

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

である.

例題 4.3

[**ヘッセの標準形**] 平面内の直線の方程式 $ax+by+c=0$ は，$c \leq 0$ として一般性を失わない．さらに，$ab \neq 0$ を仮定する．このとき，

$$m = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad n = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad d = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

とおくと，上の直線の方程式は

$$mx + ny = d$$

となる．このとき，次が成り立つ．

(1) $\boldsymbol{n} = (m, n)$ はこの直線の法線ベクトルである．

(2) $|\boldsymbol{n}| = 1$.

(3) 原点 O からこの直線へ引いた垂線の足は (dm, dn) である.

(4) d は原点 O からこの直線までの距離である．

解　(1) この直線の方程式を $ab \neq 0$ で割ると，$\dfrac{x}{b} = \dfrac{y+\frac{c}{b}}{-a}$ となるので，方向係数は $(b, -a)$ となる．よって，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \cdot (b, -a) &= (m, n) \cdot (b, -a) = bm - an \\ &= b\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - a\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ba-ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{n}$ は方向係数と垂直である，したがって，法線ベクトルである．

(2) 内積の計算から

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{n}| &= \sqrt{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}} = \sqrt{(m,n)\cdot(m,n)} \\ &= \sqrt{m^2+n^2} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}} = 1\end{aligned}$$

となる．

(3) 求める垂線の足は，(1) より原点を通り方向ベクトル (m,n) の直線と与直線の交点である．原点を通り方向ベクトル (m,n) の直線の方程式は，$\dfrac{y}{n}=\dfrac{x}{m}$ である．これが与直線と交わる点は，これと $mx+ny=d$ との連立 1 次方程式の解で与えられる．$y=\dfrac{n}{m}x$ を $mx+ny=d$ に代入して

$$\begin{aligned}mx+\frac{n^2}{m}x &= d, \\ (m^2+n^2)x &= md.\end{aligned}$$

(2) で見たように $m^2+n^2=1$ となるので，$x=md$ がわかり，$y=\dfrac{n}{m}x$ に代入して連立 1 次方程式の解

$$x=md, \quad y=nd$$

を得る．よって，垂線の足は (md,nd) である．

(4) 原点 O からこの直線までの距離は，原点 O と (3) で求めた垂線の足までの距離である．したがって，(2) より $m^2+n^2=1$ だから，(3) より，

$$\sqrt{(md)^2+(nd)^2}=\sqrt{m^2d^2+n^2d^2}=\sqrt{(m^2+n^2)d^2}=\sqrt{d^2}=|d|=d$$

となり，求める距離は d であることが分かった．

問 4.12　2 直線 $3x-4y+5=0$, $5x+12y-26=0$ について，以下の問に答えよ.

(1) この 2 直線のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ.

(2) この 2 直線のヘッセの標準形をそれぞれ書け.

(3) 原点 O からそれぞれの直線に引いた垂線の足を求めよ.

問 4.13　平行な 2 直線 $3x-4y+2=0$, $3x-4y-3=0$ の距離を求めよ.

問 4.14　2 点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられる.

例題 4.4

次の問に答えよ.

(1) 平面上の 2 直線 $\dfrac{x}{l_1} = \dfrac{y}{m_1}$, $\dfrac{x}{l_2} = \dfrac{y}{m_2}$ のなす角を θ とするとき, $\cos\theta$ の値を求めよ.

(2) 平面上の 2 直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ のなす角を θ とするとき, $\cos\theta$ の値を求めよ.

(3) 空間内の 2 直線 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{5}$, $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$ のなす角を θ とするとき, $\cos\theta$ の値を求めよ.

(4) 空間内の 2 平面 $2x + 3y + z - 5 = 0$, $x + y + z - 3 = 0$ のなす角を θ とするとき, $\cos\theta$ の値を求めよ.

解

(1) 平面上の 2 直線 $\dfrac{x}{l_1} = \dfrac{y}{m_1}$, $\dfrac{x}{l_2} = \dfrac{y}{m_2}$ のなす角を θ とすると, この 2 直線の方向ベクトルは, それぞれ (l_1, m_1), (l_2, m_2) となる. したがって, 系 4.7 より,

$$\cos\theta = \frac{(l_1, m_1) \cdot (l_2, m_2)}{|(l_1, m_1)||(l_2, m_2)|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{{l_1}^2 + {m_1}^2}\sqrt{{l_2}^2 + {m_2}^2}}.$$

(2) 平面上の 2 直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ のなす角を θ とすると, この 2 直線の法線ベクトルは, それぞれ (a_1, b_1), (a_2, b_2) となる. したがって, 系 4.7 より,

$$\cos\theta = \frac{(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)}{|(a_1, b_1)||(a_2, b_2)|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}\sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}}.$$

(3) 空間内の2直線 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{5}$, $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$ のなす角を θ とする．平面の場合と同様に，方向ベクトルが $(1,2,5)$ と $(3,-2,1)$ であることが分かるので，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{(1,2,5)\cdot(3,-2,1)}{|(1,2,5)||(3,-2,1)|}\\ &= \frac{3-4+5}{\sqrt{1+4+25}\sqrt{9+4+1}}\\ &= \frac{4}{\sqrt{30}\sqrt{14}} = \frac{4}{2\sqrt{15}\sqrt{7}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{105}}.\end{aligned}$$

(4) 空間内の2平面 $2x+3y+z-5=0$, $x+y+z-3=0$ のなす角を θ とするとき，これらの法線ベクトルはそれぞれ $(2,3,1)$, $(1,1,1)$ であるから，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{(2,3,1)\cdot(1,1,1)}{|(2,3,1)||(1,1,1)|}\\ &= \frac{2+3+1}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+1+1}}\\ &= \frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{7}.\end{aligned}$$

問 4.15　2点 $\mathrm{P}_1(x_1,y_1,z_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2,y_2,z_2)$ を通る直線の方程式を求めよ．

問 4.16　方向余弦が $\boldsymbol{l}=(l,m)$, $\boldsymbol{l}$ と 基本ベクトル $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ のなす角がそれぞれ θ,η のとき，$l=\cos\theta$, $m=\cos\eta$ となる．

問 4.17　直線の方向余弦は，なぜ方向余弦と呼ばれるのか．

問 4.18　直線の方向余弦は，どんな図形的意味をもつか．

例題 4.5

空間のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ について,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

解 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を基本ベクトルで表すと

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e} + a_2\boldsymbol{f} + a_3\boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e} + b_2\boldsymbol{f} + b_3\boldsymbol{g}$$

となるので，定理 4.18 を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e} + a_2\boldsymbol{f} + a_3\boldsymbol{g}) \times (b_1\boldsymbol{e} + b_2\boldsymbol{f} + b_3\boldsymbol{g}) \\
&= a_1b_1\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e} + a_1b_2\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f} + a_1b_3\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{g} \\
&\quad +a_2b_1\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{e} + a_2b_2\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{f} + a_2b_3\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g} \\
&\quad +a_3b_1\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{e} + a_3b_2\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{f} + a_3b_3\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g} \\
&= a_1b_2\boldsymbol{g} - a_1b_3\boldsymbol{f} - a_2b_1\boldsymbol{g} + a_2b_3\boldsymbol{e} + a_3b_1\boldsymbol{f} - a_3b_2\boldsymbol{e} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{f} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{g} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{f} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{g}
\end{aligned}$$

となり，これを成分表示して求める結果を得る.

問 4.19 $\boldsymbol{a} = (1, -3, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 0, 3)$ とするとき，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ.

問 4.20 定理 4.18 を証明せよ.

問 4.21 原点と 3 点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\mathrm{P}_3(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ を頂点とする平行四辺形の面積が

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

となることを，外積を用いて示せ.

問 4.22　原点 O と 3 点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\mathrm{P}_3(x_3, y_3, z_3)$ をそれぞれ結ぶベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ の作る平行 6 面体の体積 V は,

$$V = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right|$$

であることを示せ.

問 4.23　原点 O と 3 点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\mathrm{P}_3(x_3, y_3, z_3)$ が同一平面上にあるための必要十分条件は,

$$V = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right| = 0$$

であることを示せ.

問 4.24　$\boldsymbol{a} = (1, -3, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 0, 3)$, $\boldsymbol{c} = (1, -1, 0)$ とするとき，これらの作る平行 6 面体の体積を求めよ.

第5章　固有値とその応用

5.1　固有値，固有ベクトル

定義 5.1　A を n 次正方行列とする．ある n 次正則行列 P を用いて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにできるとき，A は**対角化可能**であるといい，この操作を行列 A を**対角化する**という．

定義 5.2　A を n 次正方行列とする．$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なる列ベクトルと実数 α で

$$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$$

を満たすものがあるとき，α を A の**固有値**，$\boldsymbol{x}$ を固有値 α に対する（もしくは属する）**固有ベクトル**という．

補題 5.3　A を n 次正方行列とする．α を A の 1 つの固有値，$\boldsymbol{x}$ を固有値 α に対する固有ベクトルとする．このとき，

$$(\alpha E_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が成立する．さらに，

$$|\alpha E_n - A| = 0$$

が成り立つ．

定義 5.4　A を n 次正方行列とする．このとき，

$$|xE_n - A| = 0$$

は x に関する n 次方程式となる．この方程式を A の**固有方程式**という．

5.2　行列の対角化

定義 5.5　P を n 次正則行列とする．${}^tP = P^{-1}$ のとき，P を**直交行列**という．

定理 5.6　(1) n 次対称行列 $A\ (\neq O)$ は重複度まで入れて n 個の（実）固有値をもち，それらの少なくとも 1 つは 0 でない．

(2) 対称行列 $A\ (\neq O)$ は，直交行列を用いて対角化される．

定理 5.7　A を n 次正方行列とする．このとき，次の条件は同値である．

(1) A は対角化可能である．

(2) A は n 個の線形独立な固有ベクトルをもつ．

例題 5.1

次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

解　$|xE - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -5 & 4 \\ -3 & x-4 & 4 \\ -2 & -6 & x+5 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 - 5x - 3$
$= (x+1)^2(x-3)$. したがって，A の固有値は $-1, 3$ である．

次に，それぞれの固有ベクトルを求める．$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ を固有値 -1 に対す

る固有ベクトルとすると

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

これを解くと，$x_1 = y_1$, $z_1 = 2y_1$. よって，$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ を固有値 3 に対する固有ベクトルとすると

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

これを解くと，$x_2 = y_2$, $z_2 = y_2$. よって，$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

したがって，A の固有値は $-1, 3$ で，それらに対する固有ベクトルは，それぞれ $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.（ただし，k_1, k_2 は 0 でない任意の実数である.）

例題 5.2

次の対称行列を直交行列により対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

解　まず，A の固有値と固有ベクトルを求める．

$$\begin{aligned}|xE-A| &= \begin{vmatrix} x+1 & 3 & -1 \\ 3 & x-3 & 3 \\ -1 & 3 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= x^3-x^2-24x-36=(x+2)(x+3)(x-6)\end{aligned}$$

より，固有値は $-2, -3, 6$ となる．また，それぞれに対する固有ベクトルをも求めると，固有値 -2 に対すの固有ベクトルは $k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, 固有値 -3 に対する固有ベクトルは $k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 固有値 6 に対する固有ベクトルは $k_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ となる．

ここで，それぞれの固有ベクトルのうち，長さが 1 のものを考えると $\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ となる．ここで

$$P=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

とおくと，P は直交行列であり

$$AP=P\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

を満たす．したがって，対角化

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

を得る．

例題 5.3

次の行列の n 乗を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

解　まず，A の固有値と固有ベクトルを求める．

$|xE - A| = \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 - 2x - 2$ より，固有値は $1 \pm \sqrt{3}$ となる．また，それぞれに対する固有ベクトルを求める．固有値 $1+\sqrt{3}$ に対する固有ベクトルは $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$, 固有値 $1-\sqrt{3}$ に対する固有ベクトルは $k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ となる．ここで，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2+\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$AP = P \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
A^n &= \left(P \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1} \right)^n \\
&= P \begin{pmatrix} (1+\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{3})^n \end{pmatrix} P^{-1}
\end{aligned}
$$

となる．

例題 5.4

n 次正方行列 A が $A^2 = E$ を満たすならば，A の固有値は 1 か -1 であることを示せ．

解　λ を A の固有値, $\boldsymbol{x}$ を λ に対する固有ベクトルとすると，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が成り立つ．よって，

$$A^2\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{x}) = A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(A\boldsymbol{x}) = \lambda^2\boldsymbol{x} \ \cdots$$

ところで，$A^2 = E$ だから

$$A^2\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \ \cdots$$

,　により，$\lambda^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, すなわち，$(\lambda^2 - 1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ だから $\lambda^2 = 1$ となる．よって，$\lambda = 1, -1$ である．

例題 5.5

次の漸化式を満たす数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ の一般項を求めよ．

$$\begin{cases} x_n = 4x_{n-1} + 10y_{n-1} \\ y_n = -3x_{n-1} - 7y_{n-1} \end{cases} \qquad (x_0, y_0) = (3, 1)$$

解　$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ とおく．すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

一方，A の固有値は $-1, -2$ であり，固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ となる．したがって，

$$\begin{aligned} A^n &= \left(P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^n \\ &= P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 6(-1)^n - 5(-2)^n & 10(-1)^n - 10(-2)^n \\ -3(-1)^n + 3(-2)^n & -5(-1)^n + 6(-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また，$(x_0, y_0) = (3, 1)$ より，$\begin{cases} x_n = 28(-1)^n - 25(-2)^n \\ y_n = -14(-1)^n + 15(-2)^n \end{cases}$

例題 5.6

漸化式 $x_{n+2} - 4x_{n+1} - 5x_n = 0$ および $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ を満たす数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

解　$y_n = x_{n+1}$ とおくと，$y_{n+1} = 5x_n + 4y_n$ が成り立つ．そこで，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．そこで，例題5.5と同様な方法を用いると，$x_n = (2(-1)^n + 5^n)/3$ を得る．

例題 5.7

次の連立微分方程式を解け.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 - 3x_2 \end{cases} \qquad (x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$$

解　一般に，次がいえる．n 次正方行列 A は対角化可能で，$a_1, \ldots, a_n$ をその固有値とするとき，

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{a_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}$$

となる．ただし，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

さて，いまの場合 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ とおくと，$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$．一方，$A$ の固有値は 2, -4 であり，固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ である．$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ とおくと $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}$ となる．したがって，$(x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$ より計算すると $\begin{cases} x_1 = e^{2t} \\ x_2 = e^{2t} \end{cases}$ を得る.

例題 5.8

微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 10y = 0$$

を初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ のもとで解け.

解　$z = \frac{dy}{dt}$ とおくと $\frac{dz}{dt} = 3z + 10y$ が成り立つ．そこで $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

となる．そこで例題 5.7 と同様な方法を用いる．すると $y = (-e^{-2t} + e^{5t})/7$ を得る．

問 5.1　次の行列の固有値を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -9 & -7 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

問 5.2　次の行列を対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

問 5.3　次の行列は対角化可能かどうかを調べ，もし可能ならば対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

問 5.4　次の実対称行列を直交行列により対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

問 5.5　次の実対称行列を直交行列により対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

問 5.6 次の行列の n 乗を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

問 5.7 次の行列の固有値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & a \\ a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問 5.8 正則行列 A は 0 を固有値にもたないことを示せ.

問 5.9 正方行列 A が $A^3 = A$ を満たすならば，その固有値は 0 か 1 か -1 であることを示せ.

問 5.10 n 次正方行列 A が非負の値をとる n 個の相異なる固有値をもつとする．このとき，$B^2 = A$ なる n 次正方行列 B が存在することを示せ.

問 5.11 A を n 次正方行列，$\varPhi_A(x) = |xE - A|$ を A の固有多項式とする．このとき，次の問に答えよ.

(1) $\varPhi_A(x)$ の x^{n-1} の係数は $-\mathrm{tr}(A)$ となることを示せ.

(2) $\varPhi_A(x)$ の定数項は $(-1)^n|A|$ となることを示せ.

問 5.12 A を n 次正方行列，P を n 次正則行列，$\varPhi_A(x) = |xE - A|$ を A の固有多項式とする．このとき，次の問に答えよ.

(1) $\varPhi_{P^{-1}AP}(x) = \varPhi_A(x)$ を示せ.

(2) $\varPhi_{{}^tA}(x) = \varPhi_A(x)$ を示せ.

問 5.13　A を $2n$ 次正方行列，$\varPhi_A(x) = |xE - A|$ を A の固有多項式とする．$A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ (A_1, A_2 は n 次正方行列) とすると $\varPhi_A(x) = \varPhi_{A_1}(x)\varPhi_{A_2}(x)$ となることを示せ.

問 5.14　次の漸化式をみたす数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} - 6y_{n-1} \\ y_n = -x_{n-1} - 3y_{n-1} \end{cases}$ $(x_0, y_0) = (1, -1)$

(2) $\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + 2y_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + 3y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} + 2z_{n-1} \end{cases}$ $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -1)$

問 5.15　漸化式 $x_{n+3} - x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ および $x_0 = -1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ を満たす数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ.

問 5.16　次の連立微分方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 8x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 6x_2 \end{cases}$ $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0)$

(2) $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 2x_3 \end{cases}$ $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0, 1, -1)$

問 5.17　微分方程式 $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ を初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$ のもとで解け.

第II部

ベクトル空間

第6章　ベクトル空間

6.1　ベクトル空間

以下において，$\mathbb{K}$ は実数の集合 $\mathbb{R}$ または複素数の集合 $\mathbb{C}$ のいずれかとする．

定義 6.1　集合 V において，次の 2 種類の演算が定義されているとする．

（加法） 任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ に対して，その和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$ が決まる．

（スカラー倍） 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ と任意の $k \in \mathbb{K}$ に対して，$ka \in V$ が決まる．

この 2 種類の演算が次を満たすとき，V を $\mathbb{K}$ 上の**ベクトル空間**または**線形空間**とよぶ．ただし，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は V の元であり，k, l は $\mathbb{K}$ の元である．

(V1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(V2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(V3) ある元 $\boldsymbol{0} \in V$ が存在して，すべての $\boldsymbol{a} \in V$ に対して次が成り立つ．

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}.$$

(V4) 各 $\boldsymbol{a}$ に対して，ある元 $-\boldsymbol{a}$ が存在して次が成り立つ．

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}.$$

(V5) $k(l\boldsymbol{a}) = (kl)\boldsymbol{a}$.

(V6) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

(V7) $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$.

(V8) $(k + l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$.

ベクトル空間 V の元を**ベクトル**とよぶ．また，$\mathbf{0}$ を V の**零ベクトル**とよび，$-\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**とよぶ．

例題 6.1

任意の正の整数 n に対して，$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in \mathbb{K} \right\}$ は次に定める加法とスカラー倍でベクトル空間になることを示せ．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}.$$

解　以下において，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ とする．

まず最初に，(V3) と (V4) が成立することを示す．$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，明らかに $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$ が任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して成り立つから，(V3) が成立する．また，任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $-\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ とおけば，(V4) も成立することが容易にわかる．

残りの (V1), (V2), (V5), (V6), (V7), (V8) は，以下にあるように直接計算することにより確かめられる．

(V1)

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}).
\end{aligned}
$$

(V2)

$$
\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}.
$$

(V5)

$$k(l\boldsymbol{x}) = k\begin{pmatrix} lx_1 \\ lx_2 \\ \vdots \\ lx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(lx_1) \\ k(lx_2) \\ \vdots \\ k(lx_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (kl)x_1 \\ (kl)x_2 \\ \vdots \\ (kl)x_n \end{pmatrix} = (kl)\boldsymbol{x}.$$

(V6)

$$1\boldsymbol{x} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}.$$

(V7)

$$\begin{aligned} k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= k\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x_1+y_1) \\ k(x_2+y_2) \\ \vdots \\ k(x_n+y_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} kx_1+ky_1 \\ kx_2+ky_2 \\ \vdots \\ kx_n+ky_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ky_1 \\ ky_2 \\ \vdots \\ ky_n \end{pmatrix} = k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

(V8)

$$(k+l)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} (k+l)x_1 \\ (k+l)x_2 \\ \vdots \\ (k+l)x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 + lx_1 \\ kx_2 + lx_2 \\ \vdots \\ kx_n + ly_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} lx_1 \\ lx_2 \\ \vdots \\ lx_n \end{pmatrix} = k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{x}.$$

問 6.1　$\mathbb{K}$ の元を成分とする $n \times m$ 行列全体の集合 $\mathrm{Mat}(n,m)$ は，行列の和とスカラー倍によりベクトル空間になることを示せ.

問 6.2　数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 全体の集合 A に，加法とスカラー倍を次のように定める.

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \qquad k(a_n) = (ka_n).$$

これにより A はベクトル空間になることを示せ.

問 6.3　区間 $[a,b]$ で定義された連続関数全体の集合 $C(a,b)$ に加法とスカラー倍を次のように定める.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (kf)(x) = kf(x).$$

ただし，$f, g \in C(a,b)$ であり $k \in \mathbb{R}$ である．これにより，$C(a,b)$ は実ベクトル空間になることを示せ.

問 6.4　$\mathbb{K}$ の元を係数とする n 次以下の x の多項式全体の集合は，自然な加法とスカラー倍によりベクトル空間になることを示せ.

問 6.5　$n \times m$ 行列 A を１つ固定したとき，$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は自然な加法とスカラー倍でベクトル空間になることを示せ.

定義 6.2　(1) ベクトル空間 V の元 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が**１次独立**であるとは,

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \quad \text{ならば} \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

が成り立つときをいう．ただし，$k_i \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq n)$ である.

(2) ベクトル空間 V の元 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を**生成する**とは，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して,

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n$$

を満たす $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ が存在するときをいう．このとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の**生成系**とよぶ.

(3) V を生成する１次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の**基底**とよぶ.

定理 6.3　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ および $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ が，ともにベクトル空間 V の基底であるなら，$n = m$ が成り立つ.

定義 6.4　上の定理よりベクトル空間 V に有限個のベクトルからなる基底が存在すれば，その個数は一定となる．基底に属するベクトルの個数を V の**次元** とよび，$\dim V$ で表す。また，このとき V は**有限次元**であるという。

例題 6.2

$\mathbb{R}^n$ の標準ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は，$\mathbb{R}^n$ の基底であることを示せ．ただし，標準ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ とは i 番目の座標が 1 で他がすべて 0 であるような数ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ をいう.

解　まず，$k_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0}$ という式を考える．これは整理すると

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので，これより $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ が得られ，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ が 1 次独立であることがわかる．

次に，任意の $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して，

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

が成り立つから，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ は V の生成系であることもわかる．

以上より，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ は V の基底であることがわかった．

問 6.6　$n\times m$ 行列全体のベクトル空間 $\mathrm{Mat}(n,m)$ は，nm 次元であることを示せ．

問 6.7　行列 A が次で与えられるとき，問 6.5 で与えられたベクトル空間の基底を一組求めて，次元を決定せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

問 6.8　$\mathbb{R}$ 上の連続関数全体のなすベクトル空間 $C(\mathbb{R})$ において，次に挙げる元の集合は1次独立であることを示せ．ただし，1 は恒等的に 1 の値をとる関数をあらわす．

(1) $\{e^x, e^{2x}\}$　　(2) $\{\sin x, \cos x, 1\}$　　(3) $\{e^x, xe^x\}$

問 6.9　正の整数 k に対して，次で定義される関数 f_k を考える．

$$f_k(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & k \leq x \leq k+1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して $\{f_k\}_{k=1}^n$ は $C(\mathbb{R})$ において1次独立になることを示せ．

問 6.10　ベクトル空間 V の任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は1次独立であることを示せ．

問 6.11　V をベクトル空間として，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ をその基底とする．このとき，$\boldsymbol{w}_k := \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k$ とおくと，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ も V の基底になることを示せ．

6.2　部分空間

定義 6.5　ベクトル空間 V の空でない部分集合 U が次の条件を満たすとき，U を V の**部分空間**という．

(1) $\boldsymbol{x} \in U, \boldsymbol{y} \in U \Longrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U$.

(2) $\boldsymbol{x} \in U, k \in \mathbb{K} \Longrightarrow k\boldsymbol{x} \in U$.

定理 6.6　ベクトル空間の部分空間は，自然に定まる加法とスカラー倍でベクトル空間になる．

定義 6.7　ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が与えられているとき，これらの 1 次結合全体の集合

$$\{\, k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n \mid k_i \in \mathbb{K}\,\}$$

は V の部分空間になる．これを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ で**生成された**部分空間とよぶ.

定理 6.8　U を有限次元ベクトル空間 V の部分空間とする．このとき，$\dim U \leq \dim V$ が成り立つ．さらに，$\dim U = \dim V$ であれば，$U = V$ となる．

例題 6.3

2×2 行列のなすベクトル空間 $\mathrm{Mat}(2,2)$ において，部分集合

$$\{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid |a_{11}| = |a_{12}| = |a_{21}| = |a_{22}|\}$$

は部分空間となっているか.

解　$V = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid |a_{11}| = |a_{12}| = |a_{21}| = |a_{22}|\}$ とおくと，これは部分空間にならない．実際，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると，A, $B \in V$ であるが，$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ となり $A + B \in V$ を満たさない.

問 6.12　2×2 行列のなすベクトル空間 $\mathrm{Mat}(2,2)$ において，次に挙げる部分集合は $\mathrm{Mat}(2,2)$ の部分空間となっているか．ただし，$\mathbb{Z}$ は整数の集合を表し，E_2 は 2 次の単位行列である．

(1)　$\{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}\ (1 \leq i, j \leq 2)\}$

(2) $\{A \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid A = -{}^tA\}$

(3) $\{A \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid \det A = 0\}$

(4) $B \in \mathrm{Mat}(2,2)$ を固定したとき，$\{A \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid AB - BA = 0\}$

(5) $\{A \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid {}^tAA = E_2\}$

問 6.13　n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し，A のトレース $\mathrm{Tr}(A)$ を対角成分の和 $\mathrm{Tr}(A) = \sum_i a_{ii}$ で定める．このとき，$\{\, A \in \mathrm{Mat}(n,n) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0 \,\}$ はベクトル空間 $\mathrm{Mat}(n,n)$ の部分空間になることを示せ．また，この部分空間の基底を一組求め，その次元を決定せよ．

問 6.14　n 次正方行列 B をひとつ固定する．このとき，$\{\, A \in \mathrm{Mat}(n,n) \mid \mathrm{Tr}(AB) = 0 \,\}$ はベクトル空間 $\mathrm{Mat}(n,n)$ の部分空間になることを示せ．また，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ としたときのこの部分空間の基底を一組求め，その次元を決定せよ．

問 6.15　数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ で，その絶対値の和が有界であるもの，すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ となるもの全体の集合は，問 6.2 において定義したベクトル空間 A の部分空間になることを示せ．また，この部分空間においては，任意の正の整数 n に対して n 個の 1 次独立なベクトルが存在することを示せ．このことより，この部分空間は無限次元であることが判る．

問 6.16　区間 $[a,b]$ で定義された微分可能な関数全体の集合 $D(a,b)$ は，問 6.3 で定義したベクトル空間 $C(a,b)$ の部分空間になることを示せ．

問 6.17　実数上の n 階微分可能な関数 f で，その n 次導関数が 0 であるようなもの，すなわち $f^{(n)}(x) = 0 \ (\forall x \in \mathbb{R})$ となるもの全体の集合は，問 6.16 で定義したベクトル 空間 $D(\mathbb{R})$ の部分空間になることを示せ．（よって，$C(\mathbb{R})$ の部分空間にもなっている．）

定理 6.9　ベクトル空間 V の部分空間 U_1, U_2 に対して，共通集合

$$U_1 \cap U_2$$

は V の部分空間となる．また，

$$U_1 + U_2 = \{\, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \mid \boldsymbol{u}_1 \in U_1,\ \boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{U}_2 \,\}$$

も V の部分空間になる．

定義 6.10　ベクトル空間 V の部分空間 U_1, U_2 に対して，V の部分空間 $U_1 + U_2$ を U_1 と U_2 の**和空間**という．

定理 6.11　ベクトル空間 V の有限次元部分空間 U_1, U_2 に対して，次の等式が成り立つ．

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

例題 6.4

$\mathbb{K}^4$ のベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ で生成される $\mathbb{K}^4$ の部分空間を V_1, $\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ で生成される $\mathbb{K}^4$ の部分空間を V_2 とする．このとき，$V_1 \cap V_2$ および $V_1 + V_2$ の一組の基底を求めよ．また，次元を求めよ．

解　$\boldsymbol{x} \in V_1 \cap V_2$ を任意に選ぶと，$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 = k_3\boldsymbol{x}_3 + k_4\boldsymbol{x}_4$ と表すことができる．これから連立方程式

$$\begin{cases} -k_1 + \ \ k_2 = \qquad k_4 \\ \ \ \ k_1 + \ \ k_2 = -2k_3 \\ \ \ 2k_1 + 2k_2 = \qquad k_4 \\ -3k_1 \qquad\ \ = -3k_3 \end{cases}$$

が得られる．これを解くと，$k_1 = t,\ k_2 = -3t,\ k_3 = t,\ k_4 = -4t\ (t \in \mathbb{K})$ が得られ，$V_1 \cap V_2$ の基底として，例えば $-\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ を得る．また，$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ である．

一方，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は1次独立であることが示される．同様に，$\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ も1次独立であることが示される．よって，$\dim V_1 = \dim V_2 = 2$ となるので，定理6.11より，$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 3$ が分かる．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が1次独立であることは容易に示されるので，これが $V_1 + V_2$ の一組の基底になる．

問6.18　$\mathbb{K}^4$ の部分集合 V_1, V_2 を

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \ a + 3b + 2c - 2d = 0 \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \ \begin{array}{r} a + 2b - d = 0 \\ 3a + 5b - c - 2d = 0 \end{array} \right\}$$

と定義したとき，V_1, V_2 が $\mathbb{K}^4$ の部分ベクトル空間であることを示めせ．また，$\mathbb{K}^4$ の部分空間 $V_1 \cap V_2$ の基底を一組求め，その次元を決定せよ．

問6.19　問6.18の V_1, V_2 において $V_1 + V_2 = \mathbb{K}^4$ となることを示せ．

問6.20　$\mathbb{K}^4$ の部分空間 V_1, V_2 を次のように与えるとき，$V_1 \cap V_2$ およ

び V_1+V_2 の一組の基底を求めよ．また，次元を求めよ．

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\,\middle|\, a+2b+c+3d=0\right\},$$

$$V_2=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\,\middle|\, 2a-3b+c+d=0\right\}.$$

問 6.21　$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-5\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_4=\begin{pmatrix}-1\\-9\\-1\\-4\end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ で生成される $\mathbb{K}^4$ の部分空間を V_1 とし，$\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ で生成される $\mathbb{K}^4$ の部分空間を V_2 とするとき，$V_1\cap V_2$ および V_1+V_2 の一組の基底を求めよ．また，次元を求めよ．

問 6.22　$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\5\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_4=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_5=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ で生成される $\mathbb{K}^4$ の部分空間を V_1 とし，$\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5$ で生成される $\mathbb{K}^4$ の部分空間を V_2 とするとき，$V_1\cap V_2$ および V_1+V_2 の一組の基底を求めよ．また，次元を求めよ．

問 6.23　V をベクトル空間として，W_1, W_2 を V の部分空間とする．任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}_1\in W_1$, $\boldsymbol{v}_2\in W_2$ が 1 次独立となることは，$W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$ となるための必要十分条件であることを示せ．

6.3　直和

定義 6.12　ベクトル空間 V とその部分空間 $U_1,\ U_2$ に対して，$V = U_1 + U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つとき，V は U_1 と U_2 の**直和**であるといい，$V = U_1 \oplus U_2$ と表す．

定理 6.13　ベトル空間 V がその部分空間 U_1, U_2 の直和である必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2\ (\boldsymbol{x}_i \in U_i)$ とただ一通りの方法で表されることである．

定義 6.14　ベクトル空間 V とその部分空間 $U_1, \ldots, U_n\ (n \geq 2)$ に対して，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_n\ (\boldsymbol{x}_i \in U_i)$ とただ一通りの方法で表されるとき，V は $U_1, \ldots, U_n$ の**直和**であるといい，$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ と表す．この定義において $n = 2$ のときは，定理 6.13 より，定義 6.12 と一致することにに注意する．

例題 6.5

ベクトル空間 V がその部分空間 $V_1,\ V_2,\ V_3$ の直和である必要十分条件は，$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ かつ $V = (V_1 + V_2) \oplus V_3$ を満たすことである。このことを示せ.

解　$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ とする．いま，任意に $\boldsymbol{x} \in V_1 \cap V_2$ をとると，$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ であれば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3\ (\boldsymbol{x}_i \in V_i)$ という形の表し方に，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$ と $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$ という 2 通りの表し方が存在し，矛盾が生じる．よって，$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$，すなわち $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ となり，$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ となる．

同様に，任意に $\boldsymbol{x} \in (V_1 + V_2) \cap V_3$ をとったとき，$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ であれば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\ (\boldsymbol{v}_i \in V_i)$ と表したとき，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3\ (\boldsymbol{x}_i \in V_i)$ という形の表し方に，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$ と $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}, \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}$ という 2 通りの表し方が存在し，矛盾が生じる．よって，$(V_1 + V_2) \cap V_3 = \{\mathbf{0}\}$

となり，仮定より $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ だから，$V = (V_1 + V_2) \oplus V_3$ となることがわかる．

逆に，$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ かつ $V = (V_1 + V_2) \oplus V_3$ が成り立つとする．仮定より，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ $(\boldsymbol{x}_i \in V_i)$ と表される．いま，別の方法で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3$ $(\boldsymbol{y}_i \in V_i)$ と表されたとする．$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in V_1 + V_2$ であり，仮定より $V = (V_1 + V_2) \oplus V_3$ なので，定理6.13 より $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ かつ $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{y}_3$ が成り立つ．同様に仮定より $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ だから，定理6.13 より $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1$ かつ $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_2$ となり，以上から $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ が分かる．

問 6.24　ベクトル空間 V が 2 つの部分空間 W_1, W_2 の和 $V = W_1 + W_2$ となっているとする．このとき，V が W_1 と W_2 の直和となる必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{v}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in W_2$ に対して，$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ となることである．このことを証明せよ．

問 6.25　$\mathbb{K}^n$ が 2 つの部分空間 V_1 と V_2 の直和になっているとする．A を n 次の正則行列として，$W_1 := \{\, A\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V_1 \,\}, W_2 := \{\, A\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V_2 \,\}$ と部分空間 W_1, W_2 を定義する．このとき，$\mathbb{K}^n$ は W_1 と W_2 の直和になっていることを示せ．

6.4　1次写像とその表現

定義 6.15　同じ $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 U から V への写像 $f \colon U \to V$ が **1次写像**あるいは**線形写像**であるとは，次の 2 条件を満たすときをいう．

(1) $f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) \qquad (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in U).$

(2) $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x}) \qquad (k \in \mathbb{K},\ \boldsymbol{x} \in U).$

例題 6.6

実数全体で定義された連続関数全体からなるベクトル空間 $C(\mathbb{R})$ から $\mathbb{R}$ への写像 $\phi\colon \mathbb{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ で次のように定義されているものは 1 次写像であることを示せ.

$$\phi(f) = f(0)$$

解　$f, g \in C(\mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\phi(f+g) = (f+g)(0) = f(0) + g(0) = \phi(f) + \phi(g)$$
$$\phi(cf) = (cf)(0) = c(f(0)) = c\phi(f)$$

となるから，ϕ は 1 次写像である.

問 6.26　次に定める写像 f が 1 次写像であるか確かめよ. ただし，$\mathrm{Mat}(n, m)$ は $n \times m$ 行列全体からなるベクトル空間である.

(1) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$ で与えられる写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(2) $f(X) = X + {}^t X$ で与えられる写像 $f\colon\ \mathrm{Mat}(n, n) \to \mathrm{Mat}(n, n)$.

(3) 行列 $A, B \in \mathrm{Mat}(n, n)$ を固定し，$f(X) = AX - XB$ で与えられる写像 $f\colon\ \mathrm{Mat}(n, n) \to \mathrm{Mat}(n, n)$.

(4) $a \in \mathbb{K}$ と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{w}_0 \in \mathbb{K}^n$ を固定し，$f(\boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}_0$ で与えられる写像 $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

問 6.27 次で与えられる写像 $\phi\colon V \to W$ が1次写像であることを示せ.

(1) $V = \mathbb{K}^3$, $W = \mathbb{K}$ とし，ϕ は $\phi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2$ で与えられる写像とする.

(2) V, W はともに $\mathbb{K}$ の元を係数とする x の多項式全体からなるベクトル空間とし，$\phi(p(x))$ は $p(x)$ の n 次導関数 $p^{(n)}(x)$ とする.

(3) V, W はともに $\mathbb{K}$ の元を係数とする x の4次以下の多項式全体からなるベクトル空間とし，ϕ は $\phi(p(x)) = p(x) + p''(x)$ で与えられる写像とする.

(4) V, W はともに n 次 正方行列全体からなるベクトル空間 $\mathrm{Mat}(n, n)$ とし，ϕ は，ある固定された正則行列 P により $\phi(A) = PAP^{-1}$ で与えられる写像とする.

定義 6.16 $f\colon U \to V$ が1次写像であるとき，

$$f(U) = \{\, f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in U \,\}$$

は V の部分空間になる．これを f の**像**とよび $\mathrm{Im}\, f$ で 表す.

また，

$$f^{-1}(\mathbf{0}) = \{\, \boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \,\}$$

は U の部分空間になる．これを f の**核**とよび $\mathrm{Ker}\, f$ で表す.

定義 6.17 $f\colon U \to V$ が1次写像であるとき，次の等式が成り立つ．ただし，U は有限次元である.

$$\dim U = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f).$$

定義 6.18　全単射である1次写像　$f\colon U \to V$　を**同型写像**とよぶ．同型写像 $f\colon U \to V$ が存在するとき，U と V は**同型**であるといい，$U \cong V$ と表す．

例題 6.7

1次写像 $\phi\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ が行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ により

$$\phi(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

で与えられているとき，$\operatorname{Ker}\phi$ を求めよ．

解　$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ とする．これより $x + 2y + 3z = 0$, $y + z = 0$ が得られ，これを解くことにより

$$\operatorname{Ker}\phi = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{K} \right\}$$

を得る．

問 6.28　問 6.27 のそれぞれの1次写像 ϕ について, $\operatorname{Ker}\phi$ を求めよ．

問 6.29　1次写像 $f\colon V \to W$ が単射である必要十分条件は，$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つことである．このことを示せ．

問 6.30　V, W をベクトル空間として, 1次写像 $f\colon V \to W$ は $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ を満たしているとする．いま，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の1次独立なベクトルの組であるなら，$f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ も1次独立であることを示せ．

問 6.31　$f\colon V \to W$ は 1 次写像で，V のある基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対して，$f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ も W の基底になっていると仮定する．このとき，f は全単射となることを示せ．

定義 6.19　$f\colon U \to V$ を 1 次写像とする．いま，U の基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ および V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対して，$a_{ij} \in \mathbb{K}\ (1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$ を

$$f(\boldsymbol{u}_j) = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{v}_n$$

で定める．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底なので，すべての a_{ij} が一意に決まることに注意する．このようにしてできた $n \times m$ 行列 (a_{ij}) を U の基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ および V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する f の**表現行列**とよぶ．

定理 6.20　$f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ を 1 次写像とする．$\alpha = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ $\beta = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\gamma = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_p\}$ をそれぞれ U, V, W の基底とし，α, β に関する f の表現行列を A とし，β, γ に関する g の表現行列を B とすると，合成 $g \circ f$ の α, γ に関する表現行列は，行列の積 BA になる．

定義 6.21　ベクトル空間 V に 2 組の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ が与えられているとする．このとき，1 次写像の表現行列のときと同様に，n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が

$$\boldsymbol{v}_j = a_{1j}\boldsymbol{v}'_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}'_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{v}'_n$$

により定まる．この行列 A を基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ から $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ への**変換行列**とよぶ．

定理 6.22　ベクトル空間 V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ から $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ への変換行列は，恒等写像 $1_V\colon V \to V$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ に関する表現行列に等しい．

例題 6.8

1次写像 $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ が，ある $m \times n$ 行列 A により $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えられているとする．このとき，次の問に答えよ．ただし，$\boldsymbol{e}_i$ は $\mathbb{K}^n$ あるいは $\mathbb{K}^m$ の第 i 番目の標準ベクトル（i 番目の座標が 1 で他がすべて 0 であるような数ベクトル）である．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\mathbb{K}^n$ のある基底とすると，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ から $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ への基底の変換行列は第 i 列が $\boldsymbol{v}_i$ であるような行列 $(\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n)$ になることを示せ.

(2) $\mathbb{K}^n$ の基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_n$ と $\mathbb{K}^m$ の基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_m$ に関する f の表現行列は A になることを示せ.

(3) $\mathbb{K}^n$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\mathbb{K}^m$ の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ に関する f の表現行列は $(\boldsymbol{w}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{w}_m)^{-1} A\, (\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n)$ で与えられることを示せ.

解　(1) $\boldsymbol{v}_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{nj} \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{v}_j = v_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_{nj}\boldsymbol{e}_n$ なので，変換行列は $(v_{ij}) = (\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n)$ になる.

(2) $A = (a_{ij})$ の第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とおく．すなわち，$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ とする．このとき，

$$f(\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{a}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{a}_n)\, \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\boldsymbol{e}_i$$

なので，f の $\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_n$ と $\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_m$ に関する表現行列は A になる.

(3) f の $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ に関する表現行列 X は，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に関する $1_{\mathbb{K}^n}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ の表現行列 B, $\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_n$ と $\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_m$

に関する f の表現行列 A, および $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ と $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ に関する $1_{\mathbb{K}^m} \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ の表現行列 C により,

$$X = CAB$$

で与えられる．いま，(1) より $B = (\boldsymbol{v}_1\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n)$, $C = (\boldsymbol{w}_1\ \ldots\ \boldsymbol{w}_m)^{-1}$ となるので，求める表現行列は $(\boldsymbol{w}_1\ \ldots\ \boldsymbol{w}_m)^{-1} A\,(\boldsymbol{v}_1\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n)$ となる．

問 6.32　ベクトル空間 V, W の基底を次のように与えたとき，次で与えられる 1 次写像 $f \colon V \to W$ のそれらの基底に関する表現行列を求めよ．

(1) $V = \mathbb{K}^3$ の基底を $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とし，$W = \mathbb{K}^2$ の基底を $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．f は行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ により，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えられる 1 次写像とする．

(2) $V = W = \mathbb{K}^3$ の基底はともに $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とし，f は行列
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
により，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えられる 1 次写像とする．

(3) V, W はともに 3 次以下の x の多項式とし，V と W の基底はともに $1, x, x^2, x^3$ とする．f は $f(p(x)) = e^x(e^{-x}p(x))'$ で与えられる 1 次写像とする．

(4) $V = W = \mathrm{Mat}(2,2)$ とし，V と W の基底はともに $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．f は行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ により $f(X) = PX$ で与えられる 1 次写像とする．

第7章　内積空間

7.1　内積

$K = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．V を K 上の線形空間とする．

V の任意の 2 元 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ に対して，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表わされる K の元が対応していて，次の法則が成り立つとき，この対応を V 上の**内積**とよぶ.

(1) $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$.

(2) $(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (a \in K)$.

(3) $\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$　($\overline{c}$ は c の共役複素数を表わす).

(4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

特に，$K = \mathbb{R}$ のとき，(3) は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ となる．

K 上の線形空間 V 上に内積が与えられているとき，V を K 上の**内積空間**とよぶ．特に，$K = \mathbb{R}$ のとき V を**実内積空間**，$K = \mathbb{C}$ のとき V を**複素内積空間**とよぶ.

実数 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ (≥ 0) に対して，$\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ を $\boldsymbol{x}$ の**長さ**または**ノルム**とよび，$||\boldsymbol{x}||$ で表わす．$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$.

内積空間 V において, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ のとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とは**直交する**といい, $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ で表わす．また，$||\boldsymbol{x}|| = 1$ ならば $\boldsymbol{x}$ を**単位ベクトル**とよぶ．内積空間の部分集合 S は，S の任意の 2 元が直交するとき，**直交系**とよばれる．単位ベクトルだけからなる直交系を，**正規直交系** とよぶ.

以下，V を K 上の内積空間，$(,)$ を内積とする．

(1) (1.1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$.

(1.2) $(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y}) = \overline{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(1.3) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ ならば, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$.

(2) $(\sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{x}_i, \sum_{j=1}^m b_j \boldsymbol{y}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \overline{b_j} (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j)$.

(3) (3.1) $||a\boldsymbol{x}|| = |a| \cdot ||\boldsymbol{x}||$.

(3.2) $||\boldsymbol{x}|| \geq 0$.　$||\boldsymbol{x}|| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

(3.3) $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$ (**シュヴァルツの不等式**).　等号は，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とが 1 次従属のとき，およびそのときに限り成り立つ.

(3.4) $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$ (**三角不等式**)．等号は，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x}$ ($a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$) のとき，およびそのときに限り成り立つ．

(4) V の $\boldsymbol{0}$ でない元 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ が互いに直交すれば，それらは 1 次独立である．

(5) （**グラム-シュミットの直交化法**）$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ ($r \geq 1$) を 1 次独立な V の元とする．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||} \\
\boldsymbol{e}_2 &= \frac{\boldsymbol{a}'_2}{||\boldsymbol{a}'_2||}, \quad \boldsymbol{a}'_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 \\
\boldsymbol{e}_3 &= \frac{\boldsymbol{a}'_3}{||\boldsymbol{a}'_3||}, \quad \boldsymbol{a}'_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{e}_r &= \frac{\boldsymbol{a}'_r}{||\boldsymbol{a}'_r||}, \quad \boldsymbol{a}'_r = \boldsymbol{a}_r - (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 - \cdots - (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{e}_{r-1})\boldsymbol{e}_{r-1}
\end{aligned}
$$

とすれば，$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ は正規直交系である．

(6) V は有限次元であるとし，V の基底が正規直交系であるとき，この基底を**正規直交基底**とよぶ．V は小なくとも 1 つの正規直交基底をもつ．

(7) $\dim V = n \geq 1$ とする．$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ $(r \leq n)$ を正規直交系とすると，これを含む V の正規直交系が存在する．

(8) V を実内積空間とする．

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ ならば，$-1 \leq \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||} \leq 1$ (シュヴァルツの不等式より)．

したがって，

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

を満たす実数 θ がただ 1 つ定まる．これを $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とのなす**角**とよび，$\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表わす．

$$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ または } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \text{ または } \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\pi}{2}.$$

$<$ 注意 $>$ 1 つの線形空間に与えられる内積は，1 つとは限らない．内積の与え方が異なれば，内積空間としては別物である．

例題 7.1

K^n の 2 元 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1\overline{y}_1 + \cdots + x_n\overline{y}_n \ (= {}^t\boldsymbol{x} \cdot \overline{\boldsymbol{y}})$$

とすると，これは K^n の内積を与える．この内積を K^n の**自然内積**とよぶ．とくに断らないときには，K^n の内積は自然内積を考えるものとする．

＜注意＞ $K=\mathbb{R}$ のときは，共役複素数を表わす ¯ は不要である．

解　$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とする．

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) &= {}^t(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)\cdot\overline{\boldsymbol{y}} = (x_1+x'_1)\overline{y}_1+\cdots+(x_n+x'_n)\overline{y}_n \\
&= (x_1\overline{y}_1+\cdots+x_n\overline{y}_n)+(x'_1\overline{y}_1+\cdots+x'_n\overline{y}_n) \\
&= {}^t\boldsymbol{x}_1\cdot\overline{\boldsymbol{y}}+{}^t\boldsymbol{x}_2\cdot\overline{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}). \\
(a\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}) &= {}^t(a\boldsymbol{x}_1\cdot\overline{\boldsymbol{y}} = (ax_1)\overline{y}_1+\cdots+(ax_n)\overline{y}_n \\
&= a(x_1\overline{y}_1+\cdots+x_n\overline{y}_n) = a{}^t\boldsymbol{x}_1\cdot\overline{\boldsymbol{y}} = a(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}). \\
\overline{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})} &= \overline{x_1\overline{y}_1+\cdots+x_n\overline{y}_n} = \overline{x}_1y_1+\cdots+\overline{x}_ny_n \\
&= (y_1\overline{x}_1+\cdots+y_n\overline{x}_n) = {}^t\boldsymbol{y}\cdot\overline{\boldsymbol{x}}_1 = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_1). \\
(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1) &= x_1\overline{x}_1+\cdots+x_n\overline{x}_n = |x_1|^2+\cdots|x_n|^2 \geq 0. \\
(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1)=0 &\iff |x_1|^2=\cdots=|x_n|^2=0 \\
&\iff x_1=\cdots=x_n=0 \iff \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

以上より，$(,)$ が K^n の内積であることがわかる．

例題 7.2

$\mathbb{R}_n[x]$ は n 次以下の実数係数多項式全体のなす $\mathbb{R}$ 上の線形空間を表わす．$\mathbb{R}_n[x]$ の 2 元 F, G に対して

$$(F,G) = \int_0^1 F(t)G(t)\,dt$$

とすると，これは $\mathbb{R}_n[x]$ の内積となることを示せ．

解　$\mathbb{R}_n[x] \ni F_1,\ F_2,\ G,\ \mathbb{R} \ni a$ とする．

$$\begin{aligned}
(F_1+F_2, G) &= \int_0^1 (F_1+F_2)(t)G(t)\ dt = \int_0^1 (F_1(t)+F_2(t))G(t)\ dt \\
&= \int_0^1 F_1(t)G(t)\ dt + \int_0^1 F_2(t)G(t)\ dt \\
&= (F_1, G) + (F_2, G). \\
(aF_1, G) &= \int_0^1 (aF_1)(t)G(t)\ dt = \int_0^1 aF_1(t)G(t)\ dt \\
&= a\int_0^1 F_1(t)G(t)\ dt = a(F_1, G). \\
(F_1, G) &= \int_0^1 F_1(t)G(t)\ dt = \int_0^1 G(t)F_1(t)\ dt = (G, F_1). \\
(F_1, F_1) = 0 &\iff \int_0^1 F_1(t)^2\ dt = 0 \\
&\iff [0,1] \text{ で } F_1(t) = 0 \iff F_1 = 0.
\end{aligned}$$

したがって，$(,)$ は $\mathbb{R}_n[x]$ の内積を与える．

例題 7.3

シュヴァルツの不等式 $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$ を証明せよ．

解　$\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ のときは両辺ともに 0 に等しい．$\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ とする．任意の $a \in K$ に対して，

$$\begin{aligned}
0 \leq ||\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{y}|| &= (\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - a\boldsymbol{y}) \\
&= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - a\boldsymbol{y}) - a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - a\boldsymbol{y}) \\
&= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \overline{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + a\overline{a}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).
\end{aligned}$$

ここで, $a = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})/(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ とおくと,

$$0 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \frac{|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} = ||\boldsymbol{x}||^2 - \frac{|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2}{||\boldsymbol{y}||^2}$$

を得る．よって，$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$. 等号が成り立つ $\Longleftrightarrow ||\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{y}|| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} - a\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が 1 次従属.

例題 7.4

$\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を正規直交化せよ.

解　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

$||\boldsymbol{a}_1|| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ であるから，$\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{a}_2' = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$||\boldsymbol{a}_2'|| = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+1+4} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ であるから,

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2'}{||\boldsymbol{a}_2'||} = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_3' &= \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}(-1+2)\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$||\boldsymbol{a}_3'|| = \dfrac{2}{3}\sqrt{1+1+1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ であるから,

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_3'}{||\boldsymbol{a}_3'||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

以上より, 求める正規直交基底は, $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ である.

例題 7.5

V を実内積空間とする. このとき,

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 \Longleftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

を示せ. 複素内積空間ではこのことが成立しない. 例をあげて示せ.

解

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\ &= ||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

$$(\because\ \mathbb{R}\text{ では, }(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).)$$

したがって，$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2=||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2 \Longleftrightarrow (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0.$

複素内積空間では,

$$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2=||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$$

となるが，必ずしも，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}=0 \Longrightarrow (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ が成り立つとは限らない.

例えば，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ とすると，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=1\times 1+i(1+i)=i\neq 0$ であるが，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}=i+(-i)=0.$

問 7.1　$A=\begin{pmatrix}2&1\\ 1&1\end{pmatrix}$ とする．$\mathbb{R}^2$ において，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}$ とすると，$(\ ,\ )$ は $\mathbb{R}^2$ の内積であることを示せ.

問 7.2　$V=M_n(\mathbb{R})$ において，$(A,B)=\mathrm{tr}(B\,{}^tA)$ とすると，$(\ ,\ )$ は V の内積であることを示せ.

問 7.3　V_1, V_2 を K 上の内積空間とするとき，$V_1\times V_2\ni\{\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\}$, $\{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\}$ に対して，次は $V_1\times V_2$ の内積となることを示せ.

$$(\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\},\{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\})=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2).$$

ただし，右辺の 2 つの $(\ ,\ )$ はそれぞれ V_1, V_2 の内積とする.

(注意) 内積の記号と混乱しないように，$V_1\times V_2$ の元を $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$　の代わりに，$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\}$ で示してある.

問 7.4 次ぎは内積でないことを示せ.

(1) $\mathbb{R}^2$ において, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 - x_2y_2$.

(2) $M_2(\mathbb{R})$ において，$(A, B) = \mathrm{tr}(A + B)$.

(3) $\mathcal{C}([0, 1])$ において，$(f, g) = \int_0^{1/2} f(t)g(t)\, dt$.

問 7.5 次の各内積に対して，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $||\boldsymbol{x}||$, $||\boldsymbol{y}||$ を求めよ.

(1) $\mathbb{C}^2$ の自然内積について，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1-i \end{pmatrix}$.

(2) $\mathcal{C}([0, 1])$ の内積，$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$ について，$F(x) = x$, $g(x) = e^x$.

(3) $\mathbb{R}^2$ の内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$ について，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(4) $M_2(\mathbb{R})$ の内積 $(A, B) = \mathrm{tr}(B^tA)$ について，$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

問 7.6 $(\cdot, \cdot)_1$, $(\cdot, \cdot)_2$ を V 上の 2 つの内積とするとき，$(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_1 + (\cdot, \cdot)_2)$ も V 上の内積となることを示せ.

問 7.7 内積空間 V の任意の 2 元 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して,

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = 2||\boldsymbol{x}||^2 + 2||\boldsymbol{y}||^2 \quad (\textbf{中線定理})$$

が成り立つことを示せ.

問 7.8　複素内積空間 V の任意の 2 元 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して,

$$4(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 - ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 + i||\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}||^2 - i||\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}||^2$$

が成り立つことを示せ.

問 7.9　実内積空間において,

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \perp (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \Longleftrightarrow ||\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{y}||$$

を示せ.

問 7.10　V を内積空間とし, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して, $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**距離**とよび, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表す. このとき, 次の (1)〜(3) が成り立つ.

(1) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0.\quad d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

(2) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

(3) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$.

問 7.11　$\mathbb{R}^4$ において,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \\ b \end{pmatrix}$$

が直交系となるように, a, b, c の値を定めよ.

問 7.12　次の各基底より正規直交基底を求めよ.

(1) $\mathbb{R}^4 \supset \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$.　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\mathbb{C}^3 \supset \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$. $\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\mathbb{R}_2[x] \supset \langle 1, x, x^2 \rangle$. ただし，$(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ とする．

問 7.13 内積空間 V の $\mathbf{0}$ でないベクトルからなる直交系は，1 次独立であることを示せ.

問 7.14 W は $[0, 2\pi]$ で定義された複素数値連続関数全体のつくる線形空間で, 内積

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cdot \overline{g(t)}\,dt$$

が定義されているものとする．このとき，$S = \{e^{inx} | n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ は正規直交系であることを示せ.

問 7.15 V を有限次元の内積空間とし，$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を V の正規直交基底とする．このとき，次を証明せよ.

(1) $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i$.

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i)(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{y})$.

(3) $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$||\boldsymbol{x}||^2 = \sum_{i=1}^n |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i)|^2$. (**パーシバルの等式**)

問 7.16 V を内積空間とし，$\mathcal{E} = \{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を正規直交基底とする．1 次写像 $f : V \to V$ の $\mathcal{E}$ に関する行列表現を $A = (a_{ij})$ とする．このとき，$a_{ij} = (f(\boldsymbol{a}_j), \boldsymbol{a}_i)$ であることを証明せよ.

問 7.17　V を内積空間とする．$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in V$ に対して，

$$G = G(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m) = \det \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_m) \\ \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_m) \end{pmatrix}$$

を**グラムの行列式**とよぶ．このとき，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が 1 次独立であるためには $G(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m) \neq 0$ であることが必要十分である．このことを証明せよ．

問 7.18　V を K 上の有限次元内積空間とし，$\varphi \in \mathcal{L}(V, K)$ とする．このとき，$\varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{x} \in V)$ となる $\boldsymbol{a} \in V$ が一意的に存在することを証明せよ．

問 7.19　V を K 上の内積空間とし，S を V の部分集合とする．S のすべての元と直交する V の元全体を $S^{\perp}$ で表す.

$$S^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in V |\ \text{任意の } \boldsymbol{y} \in S \text{ に対して}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\}.$$

このとき，$S^{\perp}$ は V の部分空間であることを証明せよ．$S^{\perp}$ を S の**直交補空間**とよぶ.

問 7.20　V を K 上の有限次元内積空間とし，X, W, W_1, W_2 を V の部分空間とする．このとき，次のことを証明せよ.

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$.

(2) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

(3) $W_1 \subset W_2 \Longrightarrow W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}$.

(4) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

(5) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

問 7.21　次の部分集合 S に対して，$S^{\perp}$ を求めよ．

(1) $\mathbb{R}^3$ において，$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$　(自然内積).

(2) $\mathbb{C}^3$ において，$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$　(自然内積).

(3) $\mathbb{R}_2[x]$ において，$S = \{x^2\}$ $\left((f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right.$.)

問 7.22　$A \in M_{m,n}(K)$ とする．rank $A = r < n$ ならば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解で, 正規直交系をなすものが存在する．

7.2　随伴行列・随伴写像

V を K 上有限次元内積空間とし，V の内積を $(\cdot,\cdot)$ で表す．V の線形変換 $f(\in \mathcal{L}(V))$ に対して，$f^* \in \mathcal{L}(V)$ で

$$(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y})) \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V)$$

を満たすものが一意的に存在する．この f^* を f の**随伴変換**とよぶ．

V の任意の元 $\boldsymbol{y}$ に対して，

$$\varphi\colon V \to K, \quad \varphi(\boldsymbol{x}) = (f\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$$

を満たす写像 φ を考えると，φ は線形写像である．したがって，$\varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ を満たす $\boldsymbol{a} \in V$ がただ 1 つ存在する（前節問題 7.18)．V の各元 $\boldsymbol{y}$ に対し上のようにして決まる $\boldsymbol{a}$ を対応させる写像が f^* である．

$A \in M_n(K)$ に対して，${}^t\overline{A}$ を A^* で表す．($\overline{A}$ は，A の各成分 a_{ij} をその共役複素数 $\overline{a}_{ij}$ でおきかえてできる行列を表す．) A^* を A の**随伴行列**とよぶ．$K = \mathbb{R}$ のときは，$A^* = {}^tA$ である．

V を K 上の有限次元内積空間とする．$f \in \mathcal{L}(V)$ に対して，

- f：**正規変換** $\Longleftrightarrow f^* \circ f = f \circ f^*$.
- f：**エルミット変換** $\Longleftrightarrow f^* = f$.
  ($K = \mathbb{R}$ のときは，**対称変換**とよぶ．)
- f：**交代エルミット変換** $\Longleftrightarrow f^* = -f$.
  ($K = \mathbb{R}$ のときは，**交代変換**とよぶ．)
- f：**ユニタリ変換** $\Longleftrightarrow f^* \circ f = f \circ f^* = 1_V$.
  ($K = \mathbb{R}$ のときは，**直交変換**とよぶ．)

によって，正規，エルミット，交代エルミット，ユニタリ変換を定義する．

$A \in M_n(K)$ に対して，

- A：**正規行列** $\Longleftrightarrow A^*A = AA^*$.
- A：**エルミット行列** $\Longleftrightarrow A^* = A$.
- A：**交代エルミット行列** $\Longleftrightarrow A^* = -A$.
- A：**ユニタリ行列** $\Longleftrightarrow A^*A = AA^* = E$.

によって，正規，エルミット，交代エルミット，ユニタリ行列を定義する．実エルミット，実交代エルミット行列は第 1 章で定義した対称行列，交代行列である，また，実ユニタリ行列（すなわち，${}^tAA = A{}^tA = E$ を満たす実正方行列）を**直交行列**とよぶ．

(1) V を K 上の有限次元内積空間とする．$f,\ g \in \mathcal{L}(V)$ とすると，

(1.1) $f^* \in \mathcal{L}(V)$.

(1.2) $(f^*)^* = f$.

(1.3) $(cf)^* = \overline{c}f^* \quad (c \in K)$.

(1.4) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

(1.5) $(f + g)^* = f^* + g^*$.

(1.6) $1_V^* = 1_V$.

(2) $A, B \in M_n(K)$ とする．

(2.1) $E^* = E$.

(2.2) $(A^*)^* = A$.

(2.3) $(cA)^* = \overline{c}A^* \quad (c \in K)$.

(2.4) $(AB)^* = B^*A^*$.

(2.5) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

(3) V を K 上有限次元内積空間，$\mathcal{E}$ を V の正規直交基底とする．このとき，$f \in \mathcal{L}(V)$ に対して，

$$[f^*]_{\mathcal{E}} = [f]_{\mathcal{E}}^*$$

が成り立つ．

(4) V を K 上有限次元内積空間，$\mathcal{E}$ を V の正規直交基底とする．$f \in \mathcal{L}(V)$ に対して，

- f : 正規変換 $\Longleftrightarrow [f]_{\mathcal{E}}$: 正規行列．
- f : エルミット変換 $\Longleftrightarrow [f]_{\mathcal{E}}$: エルミット行列．
- f : 交代エルミット変換 $\Longleftrightarrow [f]_{\mathcal{E}}$: 交代エルミット行列．

- f : ユニタリ変換 $\Longleftrightarrow$ $[f]_{\mathcal{E}}$: ユニタリ行列.

例題 7.6

$A = \begin{pmatrix} 2-3i & 2i & 1+i \\ 3+i & 2+4i & -1 \\ -2i & 1-i & 2+2i \end{pmatrix}$ に対して，A^* を求めよ.

解

$$A^* = {}^t\overline{A} = {}^t\begin{pmatrix} 2+3i & -2i & 1-i \\ 3-i & 2-4i & -1 \\ 2i & 1+i & 2-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i & 3-i & 2i \\ -2i & 2-4i & 1+i \\ 1-i & -1 & 2-2i \end{pmatrix}.$$

例題 7.7

任意の正方行列は，エルミット行列と交代エルミット行列の和として一意的に表すことができる.

解　$A \in M_n(K)$ とする.

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad C = \frac{1}{2}(A - A^*)$$

とおく.

$$B^* = \frac{1}{2}(A + A^*)^* = \frac{1}{2}(A^* + A^{**}) = \frac{1}{2}(A^* + A) = B$$

より，B はエルミット行列である.

$$C^* = \frac{1}{2}(A - A^*)^* = \frac{1}{2}(A^* - A^{**}) = \frac{1}{2}(A^* - A) = -C$$

より，C は交代エルミット行列である．

$$B + C = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*) = A$$

であるから，A はエルミット行列 B と交代エルミット行列 C の和として表せる．

次に，

$$A = B_1 + C_1 = B_2 + C_2,$$
$$(B_1, B_2 : \text{エルミット行列},\ C_1, C_2 : \text{交代エルミット行列})$$

と表せたとする．このとき，$B_1 - B_2 = C_2 - C_1$ であるから，

$$(B_1 - B_2)^* = (C_2 - C_1)^*. \quad \therefore\ B_1^* - B_2^* = C_2^* - C_1^*.$$

ゆえに，$B_1 - B_2 = -C_2 + C_1$．したがって，$-C_2 + C_1 = C_2 - C_1$．$\therefore\ C_1 = C_2$. $\therefore\ B_1 = B_2$. ゆえに，表し方は一意的である．

例題 7.8

$A \in M_n(K)$ とすると，$A * A^*$, AA^* はエルミット行列であることを示せ．

解　$B = A + A^*$ とおく．

$$B^* = (A + A^*)^* = A^* + A^{**} = A^* + A = A + A^* = B$$

であるから，B はエルミット行列である．

$C = AA^*$ とおく．

$$C^* = (AA^*)^* = A^{**}A^* = AA^* = C$$

であるから，C もエルミット行列である．

例題 7.9

実対称行列，実交代行列， 直交行列は正規行列である．また，エルミット行列，交代エルミット行列，ユニタリ行列は正規行列である．

解

$$
\begin{aligned}
A: \text{実対称行列} &\Longrightarrow {}^t\overline{A} = {}^tA = A \\
&\Longrightarrow A^*A = {}^tAA = AA = A{}^tA = A^*. \\
A: \text{実交代行列} &\Longrightarrow {}^t\overline{A} = {}^tA = -A \\
&\Longrightarrow A^*A = {}^tAA = AA = A{}^tA = A^*. \\
A: \text{直交行列} &\Longrightarrow {}^tAA = A{}^tA = E,\ {}^t\overline{A} = {}^tA \\
&\Longrightarrow A^*A = {}^t\overline{A}A = {}^tAA = A{}^tA = A{}^t\overline{A} = AA^*. \\
A: \text{エルミット行列} &\Longrightarrow A^* = A \Longrightarrow A^*A = AA = AA^*. \\
A: \text{交代エルミット行列} &\Longrightarrow A^* = -A \\
&\Longrightarrow A^*A = (-A)A = A(-A) = AA^*. \\
A: \text{ユニタリ行列} &\Longrightarrow A^*A = AA^*(= E).
\end{aligned}
$$

例題 7.10

- $f \in \mathcal{L}(V)$ が正規表現である $\Longleftrightarrow ||f(\boldsymbol{x})|| = ||f^*(\boldsymbol{x})||\ (\boldsymbol{x} \in V)$.
- $A \in M_n(K)$ が正規表現である $\Longleftrightarrow ||A\boldsymbol{x}|| = ||A^*\boldsymbol{x}||\ (\boldsymbol{x} \in K^n)$.

解 上の同値性を示す．

$f^* \circ f = f \circ f^*$ とする．

$$
\begin{aligned}
||f^*(\boldsymbol{x})||^2 &= (f^*(\boldsymbol{x}), f^*(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, f^{**} \circ f^*(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{x}, f \circ f^*(\boldsymbol{x})) \\
&= (\boldsymbol{x}, f^* \circ f(\boldsymbol{x}) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})) = ||f(\boldsymbol{x})||^2.
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ ||f^*(\boldsymbol{x})|| = ||f(\boldsymbol{x})||.$$

すべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$||f^*(\boldsymbol{x})|| = ||f(\boldsymbol{x})||$ が成り立つとする．
$||f^*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|| = ||f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})||$ より，

$$\begin{aligned} & ||f^*(\boldsymbol{x})||^2 + ||f^*(\boldsymbol{y})||^2 + (f^*(\boldsymbol{x}), f^*(\boldsymbol{y})) + (f^*(\boldsymbol{y}), f^*(\boldsymbol{x})) \\ = \ & ||f(\boldsymbol{x})||^2 + ||f(\boldsymbol{y})||^2 + (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + (f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})). \end{aligned}$$

$$\therefore\ (f^*(\boldsymbol{x}), f^*(\boldsymbol{y})) + (f^*(\boldsymbol{y}), f^*(\boldsymbol{x})) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + (f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}))\ \cdots(1)$$

$||f^*(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y})|| = ||f(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y})||$ より，

$$\begin{aligned} & ||f^*(\boldsymbol{x})||^2 + ||f^*(\boldsymbol{y})||^2 - i(f^*(\boldsymbol{x}), f^*(\boldsymbol{y})) + i(f^*(\boldsymbol{y}), f^*(\boldsymbol{x})) \\ = \ & ||f(\boldsymbol{x})||^2 + ||f(\boldsymbol{y})||^2 - i(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + i(f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})). \end{aligned}$$

$$\therefore\ -(f^*(\boldsymbol{x}), f^*(\boldsymbol{y})) + (f^*(\boldsymbol{y}), f^*(\boldsymbol{x})) = -(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + (f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}))\ \cdots(2)$$

$(1)+(2)$ より $f^*(\boldsymbol{y}), f^*(\boldsymbol{x})) = (f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}))$ を得る．したがって，

$$(\boldsymbol{y}, f \circ f^*(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{y}, f^* \circ f(\boldsymbol{x})).$$

これが任意の $\boldsymbol{y} \in V$ に対して成り立つから，

$$f \circ f^*(\boldsymbol{x}) = f^* \circ f(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in V). \quad \therefore\ f \circ f^* = f^* \circ f.$$

したがって，f は正規変換でる．
行列の場合も同様である．

問 7.23　次の行列のうち，正規行列はどれか．また，エルミット行列，交代エルミット行列，ユニタリ行列はどれか．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

問 7.24

$$f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2ix + 3y + (1-i)z \\ 2iy + 3z \\ (1+i)x - iz \end{pmatrix}$$

とするとき，f^* を求めよ．

問 7.25　$f \in \mathcal{L}(V)$ について，次は同値である．

(1) f はユニタリ変換である．

(2) $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V)$.

(3) $||f(\boldsymbol{x})|| = ||\boldsymbol{x}|| \quad (\boldsymbol{x} \in V)$.

(4) $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を V の正規直交基底とすると，$\{f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)\}$ も V の正規直交基底である．

(5) 正規直交基底に関する f の表現行列は，ユニタリ行列である．

問 7.26　$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) \ (\in M_n(K))$ がユニタリ行列である $\Longleftrightarrow$ $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は K^n の正規直交基底である．これを証明せよ．

問 7.27　(1) 2 次の直交行列は，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と表される．

(2) 2 次のユニタリ行列は,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\theta}\overline{b} & -e^{i\theta}\overline{a} \end{pmatrix} \quad (\theta\text{: 実数},\ |a|^2 + |b|^2 = 1)$$

と表される.

問 7.28 $A\ (\in M_n(\mathbb{C}))$ を $A = B + iC\ (B,\ C \in M_n(\mathbb{R}))$ と表したとき.

(1) A : エルミット行列 $\iff {}^tB = B, {}^tC = -C$.

(2) A : ユニタリ行列 $\iff {}^tBB + {}^tCC = E, {}^tBC - {}^tCB = O$.

問 7.29 $A,\ B \in M_n(\mathbb{R})$ とし, A を正則行列とする. $H = A + iB$ がエルミット行列ならば, $|H|^2 = |A|^2 \cdot |E + (A^{-1}B)^2|$ であることを証明せよ.

問 7.30 $A,\ B\ (\in M_n(\mathbb{R}))$ に対して, 次を証明せよ.

$$C = A + iB : \text{ユニタリ行列} \iff \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : \text{直交行列}.$$

問 7.31 $A\ (\in M_n(\mathbb{R}))$ を直交行列とすると, $\widetilde{A} = \pm {}^tA$ であることを示せ.

問 7.32 $A,\ B\ (\in M_n(\mathbb{R}))$ を直交行列とする. このとき, 次を証明せよ.

(1) AB も直交行列である.

(2) $|A| = -|B|$ ならば, $A + B$ は正則行列ではない.

問 7.33　$A\ (\in M_n(\mathbb{C}))$ は，$|E+A| \neq 0$ を満たす行列とする．次を証明せよ．

(1) A：ユニタリ行列 $\Longrightarrow B = (E-A)(E+A)^{-1}$：交代エルミット行列．

(2) A：交代エルミット行列 $\Longrightarrow B = (E-A)(E+A)^{-1}$：ユニタリ行列．

問 7.34　2次の実正規行列は，$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ か，あるいは $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ のいずれかの形であることを証明せよ．

問 7.35　$A\ (\in M_n(\mathbb{C}))$ をエルミット行列とするとき，次を証明せよ．

(1) $A^2 = O \Longrightarrow A = O$.

(2) $\mathbb{C}^n$ の元 $\boldsymbol{x}$ に対して，$A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

問 7.36　$A_1, \ldots, A_m\ (\in M_n(\mathbb{C}))$ をエルミット行列とし，$A_1^2 + \cdots + A_m^2 = O$ とする．このとき，$A_1 = \cdots = A_m = O$ であることを示せ．

問 7.37　f を内積空間 V の正規変換とする．ある $\boldsymbol{x}\ (\in V)$ とある整数 $p \geq 1$ に対して，$f^p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ であることを証明せよ．

7.3　正規変換・正規行列の標準形

$A\ (\in M_n(\mathbb{C}))$ の固有多項式 $\varPhi_A(x)$ は，複素数の範囲で1次式の積に分解する．

$$\varPhi_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k} \quad (\lambda_i \in \mathbb{C})$$

とすると，A は正則行列 P によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & * & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_k & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

7.4　直交射影

定義 7.1 (直交射影)　V を有限次元内積空間，U をその部分空間とする．このとき，U の直交補空間 $U^{\perp}$ を用いて $V = U \oplus U^{\perp}$ と表せるので，

$$\forall \boldsymbol{x} \in V,\ \exists \boldsymbol{x}^{!} \in U,\ \exists \boldsymbol{x}^{\perp} \in U^{\perp} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{!} + \boldsymbol{x}^{\perp}.$$

これらの記号を用いて，写像 $p_U\colon V \to V$ を

$$p_U(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{!}$$

と定義し，p_U を U への**直交射影**と呼ぶ．

定理 7.2　V を有限次元内積空間，U をその部分空間とする．U の正規直交基底を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ とするとき，直交射影 $p_U\colon V \to V$ は内積を用いて，

$$p_U(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_r)\boldsymbol{u}_r$$

と表される．

定理 7.3　直交射影 $p\colon V \to V$ はうまく定義されて (well defined) おり，しかも 1 次写像である．

定義 7.4 (直交行列)　正方行列 T は

$$ {}^{t}T\,T = E = T\,{}^{t}T $$

を満たすとき，**直交行列**と呼ばれる．

定理 7.5　$T = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \ldots\ \boldsymbol{u}_n)$ ($\boldsymbol{u}_i$ は n 次列ベクトル) が直交行列であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底になることである．

例題 7.11

n 次正方行列 A について，次は同値である．
(1) A は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のある部分空間 U への直交射影である．
(2) $A = T\,{}^{t}T$ かつ ${}^{t}T\,T = E_r$ を満たす $n \times r$ 行列 T が存在する．

解　(1) $\Rightarrow$ (2) : U の正規直交基底を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ とし，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_n, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となるように $\boldsymbol{u}_{r+1}, \boldsymbol{u}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を付け加える．この正規直交基底を用いて，

$$ S = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \ldots\ \boldsymbol{u}_n), \quad T = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \ldots\ \boldsymbol{u}_r) $$

とおくと，S は直交行列であり，

$$ T = S \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} $$

となるので

$$ {}^{t}T = {}^{t}\left(S \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix} {}^{t}S. $$

一方，定理 7.2 から，

$$A\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}} = \begin{cases} \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}, & 0 \leq i \leq r \\ 0, & r < i \leq n \end{cases}$$

したがって，

$$AS = T \begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix}$$

となるので，

$$A = AS\,{}^tS = \left(T\begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix}\right){}^tS = T\left(\begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix}{}^tS\right) = T\,{}^tT.$$

同様に

$$\begin{aligned} {}^tTT &= \begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix}{}^tSS\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} \\ &= E_r. \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) : $T = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \cdots\ \boldsymbol{u}_r)$ と書くと，${}^tTT = E_r$ だから，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ は正規直交系である．上と同じように $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となるように $\boldsymbol{u}_{r+1}, \boldsymbol{u}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を付け加える．すると，$\mathbb{R}^n$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$$

と書ける．このとき，基底の取り方から，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{!} &= x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{u}_r, \\ \boldsymbol{x}^{\perp} &= x_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1} + x_{r+2}\boldsymbol{u}_{r+2} + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n. \end{aligned}$$

${}^tTT = E_r$ だから，${}^tT\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{e}_k$ なので，

$$A\boldsymbol{x} = T\,{}^tT\boldsymbol{x} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}'.$$

問 7.38　$T = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき，$A = T\,{}^tT$ は直交射影であることを示せ．また，どんな部分空間への射影であるか？

問 7.39　$\mathbb{R}^4$ の 3 つの直交系 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られる部分空間 U への直交射影を求めよ．

例題 7.12

$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$ とする．$\mathbb{R}^3$ の通常の内積を考える．

(1) V の正規直交基底を一組求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ での V への直交射影 p_V の標準基底に関する表現行列 A を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ での V の直交補空間 $V^\perp$ への直交射影 $p_{V^\perp}$ の標準基底に関する表現行列 $A^\perp$ を求めよ．

(4) $A = T\,{}^tT$ かつ ${}^tTT = E$, $A^\perp = S\,{}^tS$ かつ ${}^tSS = E$ となる行列 T, S を求めよ．

解　(1) V の任意の元 $\boldsymbol{x}$ は方程式 $x+y+z=0$ の解として表されるので

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$$

とおける．特に，$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとると，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となるので，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は V の生成系である．また，$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$ と仮定すると，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -k_1-k_2 \end{pmatrix}.$$

したがって，$k_1=0$, $k_2=0$ がいえるので $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立である．ゆえに，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は V の基底である．さらに，これからグラム-シュミット

の直交化法により正規直交系を作る：

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{a}_1||}\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{||\boldsymbol{b}_2||}\boldsymbol{b}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

これから求める正規直交基底は $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ である.

(2) 定理 7.2 により標準基底 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ に対し,

$$p_V(\boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}7\\-6\\-1\end{pmatrix},$$

$$p_V(\boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_2 = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix},$$

$$p_V(\boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1\\-6\\7\end{pmatrix}.$$

以上から，求める行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} p_V(\boldsymbol{e}_1) & p_V(\boldsymbol{e}_2) & p_V(\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & -6 & -1 \\ -6 & 12 & -6 \\ -1 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

(3) $V^\perp$ の基底を $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$, $\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$ かつ $||\boldsymbol{u}_3|| = 1$ だから，

$$\begin{cases} x - z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{cases}$$

上の 2 つの式から，$x = y = z$ がわかるので，一番下の式に代入して $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. よって，$V^\perp$ の基底は

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので，$i = 1,\ 2,\ 3$ のいずれに対しても $(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ となり，定理 7.2 から，

$$p_{V^\perp}(\boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u}_3)\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ゆえに，求める行列 $A^\perp$ は

$$A^\perp = \begin{pmatrix} p_{V^\perp}(\boldsymbol{e}_1) & p_{V^\perp}(\boldsymbol{e}_2) & p_{V^\perp}(\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) $T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}$ とおくと，行列の積の公式から，

$$\begin{aligned} T\,{}^tT &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} \\ -2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 & -6 & -1 \\ -6 & 12 & -6 \\ -1 & -6 & 7 \end{pmatrix} = A, \\ {}^tTT &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} \\ -2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

となり，求めるものであることがわかる．同様に，$S = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix}$ とおくと，行列の積の公式から，

$$\begin{aligned} S\,{}^tS &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^{\perp} \\ {}^tSS &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

となり，この S が求めるものである．

注意 例題 7.11 を用いれば先に T, S を定義してそれから，$A, A^{\perp}$ を求めることができる．

問 7.40　$\mathbb{R}^3$ 内の平面 $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x + 2y + z = 0 \right\}$ は部分ベクトル空間であることを示せ．さらに，P への直交射影を求めよ．

問 7.41　$\mathbb{R}^4$ の 3 つのベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ で張られる部分空間 U への直交射影を，U の正規直交基底を求めることにより求めよ．

第8章　固有値と固有ベクトル

8.1　固有値と固有ベクトル

定義 8.1 (固有値と固有ベクトル)　正方行列 A に対し,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

となるベクトル $\boldsymbol{x}$ と複素数 λ が存在するとき, λ を**行列** A **の固有値**と呼び, $\boldsymbol{x}$ を **行列** A **の固有値** λ **に属する固有ベクトル**と呼ぶ.

定理 8.2　λ が行列 A の固有値であるための必要十分条件は, $|A-\lambda E| = 0$.

定義 8.3 (固有多項式，固有方程式)　n 次正方行列 A に対し, n 次多項式

$$|xE - A|$$

を A **の固有多項式** と呼び,

$$|xE - A| = 0$$

を A **の固有方程式**と呼ぶ.

系 8.4　A の固有方程式の解は固有値であり、固有値は A の固有方程式の解である.

定理 8.5　行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ は 1 次独立である．

例題 8.1

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

解　まず，$\det(A - \lambda E) = 0$ を解いて固有値を求める．

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & -4 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda) + 4 + 4 - 2(4-\lambda) + 4(1-\lambda) - 2\lambda \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \end{aligned}$$

なので，$-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4 = 0$ を解くと $(\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$ より $\lambda = 1,\ 2$ である．よって，固有値は 1 と 2 である．

次に，$\lambda = 2$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求める．$\boldsymbol{v}$ は $(A - 2E)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たすので，

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい．これは $x - 2y - z = 0$ と同値なので，求めるベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{（ただし，} y, z \text{ は任意)}$$

となる.

同様に，$\lambda = 1$ に属する固有ベクトルは

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \text{ は任意})$$

となる.

問 8.1 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 5 & 13 & 14 \\ -3 & -7 & -7 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

例題 8.2

行列 A と正則行列 P に対して，A と $P^{-1}AP$ の固有値は一致する.

解 A と $P^{-1}AP$ の固有値は，それぞれ固有方程式 $|xE - A| = 0$ と $|xE - P^{-1}AP| = 0$ の解である．$E = P^{-1}P$ であることから，$xE =$

$xP^{-1}P = xP^{-1}EP = P^{-1}(xE)P$ となるので，

$$xE - P^{-1}AP = P^{-1}(xE)P - P^{-1}AP = P^{-1}(xE - A)P.$$

一方，行列の積 AB と行列式の積 $|A||B|$ の間には $|AB| = |A||B|$ なる関係があるので，

$$\begin{aligned} |xE - P^{-1}AP| &= |P^{-1}(xE - A)P| = |P^{-1}||xE - A||P| \\ &= |P^{-1}||P||xE - A| = \frac{1}{|P|}|P||xE - A| = |xE - A|. \end{aligned}$$

上式で 1 行目から 2 行目への等式は $|xE - A|$ と $|P|$ は実数だから $|xE - A||P| = |P||xE - A|$ となることに注意する．

　よって，それぞれの固有方程式 $|xE - A| = 0$ と $|xE - P^{-1}AP| = 0$ は一致するのでその解も一致する．したがって，固有値は一致する．

問 8.2　0 が正方行列 A の固有値であるための必要十分条件は，$|A| = 0$ が成り立つことである．このことを示せ．

問 8.3　転置行列の固有値は，もとの行列の固有値と等しい．

問 8.4　スカラー倍した行列の固有値は，もとの行列の固有値のスカラー倍となる．

問 8.5　直交行列の固有値の絶対値は 1 である．

例題 8.3

n 次実正方行列 A は，$A = {}^tA$ を満たしているとする．（このような行列を対称行列とよぶ．）λ_1, λ_2 を相異なる実数として，$V_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}\}$, $V_2 = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{y} = \lambda_2\boldsymbol{y}\}$ とおく．このとき，V_1 と V_2 は互いに直交する $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示せ．（ヒント：$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y})$ を使う．）

解　先ず，実数 λ に対して，$V_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示す．V_λ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して，

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$$

より，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ は V_λ のベクトルとなる．また，任意の実数 k と　V_λ　の任意のベクトル　$\boldsymbol{x}$ に対して，

$$A(k\boldsymbol{x}) = kA\boldsymbol{x} = k\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(k\boldsymbol{x})$$

となるので，$k\boldsymbol{x}$ も V_λ のベクトルとなる．これらのことから，V_λ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることがわかる．ゆえに，V_1 と V_2 は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることが従う．

次に，V_1 と V_2 が互いに直交することを示す．そのためには，V_1 の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と V_2 の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して，その内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が 0 であることを示せばよい．

$$\begin{aligned} \lambda_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= (\lambda_1\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y}) \\ &= (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \lambda_2\boldsymbol{y}) = \lambda_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

となるので，

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0.$$

$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ だから．$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ が示せた．

例題 8.4

A は 2 次対称行列で $A \neq \lambda E$ となるものとする．このとき，A は相異なる 2 つの実固有値をもつことを示せ．

解　固有方程式 $|xE - A| = 0$ を解く．A は 2 次対称行列だから，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ とおける．このとき，

$$\begin{aligned} |xE - A| &= |x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}| \\ &= |\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}| \\ &= \begin{vmatrix} x - a & -b \\ -b & x - d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

であり，これはサラスの公式から

$$\begin{aligned} &= (x - a)(x - d) - (-b)(-b) \\ &= x^2 - (a + d)x + ad - b^2 \end{aligned}$$

となるので，固有方程式は 2 次方程式

$$x^2 - (a + d)x + ad - b^2 = 0$$

となる．この 2 次方程式の判別式 D は

$$D = (a + d)^2 - 4(ad - b^2) = a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2 = (a - d)^2 + 4b^2$$

となるので，$D \geq 0$. ところで，$D = 0$ とすると，$a = d, b = 0$ となり，これは仮定に反する．したがって，$D > 0$ である．よって，A の固有方程式は相異なる 2 つの実数解，すなわち A は相異なる 2 つの実固有値をもつ．

問 8.6　行列の固有値の m 乗は行列の m 乗の固有値になる．

問 8.7 逆行列の固有値はもとの行列の固有値の逆数となる.

問 8.8 対称行列の固有値は実数である.

問 8.9 交代行列の固有値は純虚数かまたは 0 である.

例題 8.5

(1) A を n 次実正方行列とし，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ について，$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ が成立しているとする．このとき，A の実固有値は全て 0 以上の実数であることを示せ.
(2) 実固有値が全て 0 以上の実数である n 次実行列 A で，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ について $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ が成立しない例を作れ.

解 (1) λ を A の実固有値，λ に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする．このとき，$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ となるので,

$$0 \leq (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \lambda|\boldsymbol{v}|^2.$$

$|\boldsymbol{v}|^2 > 0$ なので，$\lambda \geq 0$ が従う.

(2) 例として，$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．これが求める例であることは，次のように示される．A の固有値は方程式

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1) = 0$$

を解いて A の固有値は 0 と 1 である．したがって，A は条件「実固有

値が全て 0 以上の実数である行列」を満たしている．一方,

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= (\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix})\\ &= (\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix})\\ &= -1 < 0\end{aligned}$$

となり,「任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ について $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ が成立しない例」となっている．

注意 下の 2 つの問から，例題 8.5 の (2) の例の行列は，上三角行列で対角成分が非負で上三角の部分に負の数が入ればよいことがわかる．

問 8.10　$A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする．任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ について $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ ならば，$a_{ij} \geq 0$ が成り立つ．

問 8.11　上三角行列 A は，対角成分を固有値とする．

8.2　行列の相似変形

定義 8.6　2 つの n 次正方行列 A, B に対して

$$P^{-1}AP = B$$

となる正則行列 P が存在するとき，A と B は相似であるといい,

$$A \sim B$$

と書く．

問 8.12 上で定義した $\sim$ は n 次正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{R})$ における同値関係であること，つまり

$$A \sim A,$$
$$A \sim B \Rightarrow B \sim A,$$
$$A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C,$$

が成り立つことを示せ.

問 8.13 次を示せ．なお，(3) については，直接証明と (1), (2) を利用した証明とを考えてみよ.

(1) $A \sim O \Longrightarrow A = O.$

(2) $A \sim B \iff A - \lambda E \sim B - \lambda E.$

(3) $A \sim cE \Longrightarrow A = cE.$

問 8.14 次を示せ．$A_1 \sim B_1$ かつ $A_2 \sim B_2$ のとき，

$$\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1 & * \\ O & A_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 & * \\ O & B_2 \end{pmatrix}.$$

問 8.15 次を示せ．なお，(2) の命題は B が正則であるという条件を取り除いても成り立つ.

(1)A と B は相似な行列とする．このとき，A の固有多項式と B の固有多項式は等しい.

(2)B を正則行列とする．このとき，AB の固有多項式と BA の固有多項式は等しい.

8.3 行列の対角化

定理 8.7 n 次正方行列が対角化可能であるための必要十分条件は，丁度 n 個の 1 次独立な固有ベクトルが存在することである.

例題 8.6

次の行列が対角化可能ならば対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

解　A の固有方程式を計算すると，固有値 λ は $1, 1, -1$ である．
$\lambda = 1$ の場合：$(A-E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて，$\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{p}_1 + t\boldsymbol{p}_2$．ここで，

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = -1$ の場合：$(A+E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて，$\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{p}_3$．ここで，

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

固有ベクトル達 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は，1 次独立なことが確かめられるので，A は対角化可能である．$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ とおくと，P は正則行列であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

問 8.16　次の行列が対角化可能ならば，対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & -2 \\ -6 & 1 & -4 & -6 \\ 6 & 0 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

定理 8.8　行列 A の固有方程式が重解をもたないならば，A は対角化可能である．

例題 8.7

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ が対角化可能ならば，対角化せよ．

解　A の固有値 λ は，

$$\begin{aligned} |xE - A| &= \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x \end{vmatrix} \\ &= x^2 - x - 6 \\ &= (x-3)(x+2) \end{aligned}$$

から，$\lambda = 3, -2$ である．固有値がすべて異なるので対角化可能である．

$\lambda = 3$ の場合：$(A - 3E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて，$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = -2$ の場合：$(A - 2E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

よって，$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

問 8.17　次の行列が対角化可能ならば，対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

定義 8.9

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

のように，対角線の左下の部分がすべて 0 であるような行列を上三角行列という．

同様に下三角行列も考えることができるが，ここでは上三角行列しか扱わないので，単に三角行列といった場合は上三角行列を意味するものとする．

問 8.18　$A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ を三角行列としたとき，$A+B$, AB もまた三角行列であることを示せ．行列の次数が一般の場合についても考えてみよ．

問 8.19　$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．自然数 n に対して，A^n を求めよ．

定理 8.10　任意の正方行列は三角行列と相似である．

問 8.20　A を n 次正方行列とする．定理 8.10，およびその証明の過程からわかるように，対角線上に A のすべての固有値が並ぶように A を三角化できる．この事実を利用して，A の重複を含めた固有値の積は $|A|$ に等しいことを示せ．

問 8.21 次を示せ.

$$A \text{ は正則行列である} \iff 0 \text{ は } A \text{ の固有値ではない}.$$

問 8.22 A を n 次正方行列とし，λ は A の固有値ではないとする．このとき，$A - \lambda E$ は正則行列であることを示せ.

例題 8.8

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ を三角化せよ.

解 A の固有値は 1 (重複する) である．固有ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる：$A\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1$.

一般論より，$\boldsymbol{p}_1$ を含むような $\mathbb{R}^2$ の基底の存在が保証されているが，実際 $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の基底であることがわかる．実際の計算により，

$$A\boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$$

となり，

$$A(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2) = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

いま，$P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2)$ とおくと，これは正則行列であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

問 8.23 次の行列を三角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$

例題 8.9

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ を三角化せよ.

解　A の固有値は 1 のみ (3 重解) である. $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく:

$$A\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1.$$

$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{q}_2 &= 2\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3, \\ A\boldsymbol{q}_3 &= -\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{q}_3. \end{aligned}$$

よって,

$$A(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{q}_2\ \boldsymbol{q}_3) = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{q}_2\ \boldsymbol{q}_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

次に, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおいて, B を三角化することを考えよう. この三角化は既に上の例題で行っており, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して,

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とできた．ここで，$R = \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{aligned} R^{-1}PAPQ &= R^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} \\ & B \end{pmatrix} R \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} \\ & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a}Q \\ & BQ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a}Q \\ & Q^{-1}BQ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問 8.24　次の行列を三角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

定理 8.11 (ケイレイ–ハミルトンの等式)　行列 A の固有多項式を $f(x)$ とするとき，$f(A) = O$ が成り立つ．

例題 8.10

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ のとき，$A^3 + 3A$ を求めよ。

解　A の固有方程式は $x^2 - x + 5$ なので

$$A^2 - A - 5E = O$$

が成り立つ．求めるべき式の A の代わりに x とおいた式を A の固有方程式で割り算することにより，

$$x^3 + 3x = (x+1)(x^2 - x - 5) + 9x - 5$$

がわかる。よって，

$$\begin{aligned} A^3 + 3A &= (A+E)(A^2 - A - 5E) + 9A - 5E \\ &= (A+E)\cdot O + 9A - 5E \\ &= 9\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 27 & -13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問 8.25　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，次の式を計算せよ．

(1) $A^2 - 4A - E$　　(2) $A^2 + 3A + 3E$　　(3) $A^3 + A^2 + E$

問 8.26　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，$A^3 - 4A^2$ を求めよ．

定義 8.12　ある自然数 k に対して $A^k = O$ となる正方行列を**べき零行列**という．

問 8.27　A をべき零行列とする．

(1) A の固有値はすべて 0 であることを示せ．

(2) A の固有多項式を求めよ．

問 8.28　n 次正方行列 A の固有値はすべて λ であるとし，$B = A - \lambda E$ とおく．

(1) B の固有値はすべて 0 であることを示せ．
(2) B の固有多項式を求めよ．
(3) B はべき零行列であることを示せ．

問 8.29　A を対角化可能なべき零行列とする．このとき，A は零行列であることを次の手順で示せ．なお，この命題は「零行列でないべき零行列は対角化不可能である」と言い換えてもよい．

(1) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ とおく．このとき，

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

を示せ．

(2) $A = O$ を示せ．

補題 8.13　A はべき零行列で $A^{n-1} \neq O,\ A^n = O$ とする．B を正則行列とするとき，

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

略証．

$$P = \begin{pmatrix} E & R \\ O & E \end{pmatrix}$$

$$R = CB^{-1} + ACB^{-2} + A^2CB^{-3} + \cdots + A^{n-1}CB^{-n}$$

とおくと，

$$P^{-1}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

補題 8.14　A は三角行列で，対角線には同じ数 λ_1 が並ぶとする．また，B は正方行列で，λ_1 は B の固有値ではないとする．このとき，

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

略証. 具体的な計算過程も書いておく．A を k_1 次，B を k_2 次正方行列とする．行列

$$\begin{pmatrix} A-\lambda_1 E_{k_1} & O \\ O & B-\lambda_1 E_{k_2} \end{pmatrix}$$

を考える．$A-\lambda_1 E$ はべき零行列，$B-\lambda_1 E_{k_2}$ は正則行列なので，補題 8.13 を利用する．$(A-\lambda_1 E)^{n_1-1} \neq O$, $(A-\lambda_1 E)^{n_1} = O$ とすると，

$$\begin{aligned} R &= C(B-\lambda_1 E_{k_2})^{-1} + (A-\lambda_1 E_{k_1})C(B-\lambda_1 E_{k_2})^{-2} + \cdots \\ &\qquad + (A-\lambda_1 E_{k_1})^{n_1-1} C(B-\lambda_1 E_{k_2})^{-n_1}, \\ P &= \begin{pmatrix} E_{k_1} & R \\ O & E_{k_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおけば，

$$P^{-1}\begin{pmatrix} A-\lambda_1 E_{k_1} & C \\ O & B-\lambda_1 E_{k_2} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A-\lambda_1 E_{k_1} & O \\ O & B-\lambda_1 E_{k_2} \end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ P^{-1}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

定理 8.15　正方行列 A の異なる固有値の全体を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\ \lambda_k$ とするとき，

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}.\ \text{ただし，}\quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & * \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

問 8.30　n 次正方行列は相異なる固有値を 3 つもつものとし，それらを $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とする．このとき，

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix},\ \text{ただし，}\quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & * \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

とできるが，その過程を変換行列も含めて詳しく述べよ．

8.4　ジョルダンの標準形

定義 8.16　次の形の m 次正方行列を $J(\alpha, m)$ で表し，これを**ジョルダンブロック**という．

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

定理 8.17 (ジョルダン標準形)　任意の n 次正方行列 A は，ある n 次正則行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

とかける．ただし，J_i はジョルダンブロックで，それ以外の成分はすべて 0 である．

定義 8.18　上記の定理のような形にすることを A の**ジョルダン標準形を求める**といい，P をその**変換行列**という．

例題 8.11

A は cE_2 の形でない 2×2 行列で，ただ 1 つの固有値 λ をもっているとする.（つまり，A の固有方程式が重解 λ をもつ場合である.）
(1) λ に属する 1 次独立な固有ベクトルは唯一つであることを示せ．その上で $\boldsymbol{v}$ を λ に属する固有ベクトルとし，$\boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{v}$ と平行でないベクトルとする．

$$\boldsymbol{v}_1 := (A - \lambda E_2)\boldsymbol{v}_2$$

とおいたとき，$\boldsymbol{v}_1$ は λ に属する固有ベクトルであることを示せ．
(2) P を $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ を並べてできる行列とする．つまり，$P = (\boldsymbol{v}_1\, \boldsymbol{v}_2)$. このとき，$P$ は逆行列をもつことを示し，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

となることを示せ．

解　(1) もし，λ に属する 1 次独立な固有ベクトルが 2 つあったとする．それらを $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ とする．すると，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{p_1}$ と $\boldsymbol{p_2}$ の 1 次結合を用いてかける．したがって，$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ となる．特に，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ もしくは $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくことにより $A = \lambda E_2$ となることがわかり，仮定に反する．

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - 2\lambda A + \lambda^2 E_2 = O$$

が成立することに注意する．すると，

$$\begin{aligned} (A - \lambda E_2)\boldsymbol{v_1} &= (A - \lambda E_2)^2 \boldsymbol{v_2} \\ &= (A^2 - 2\lambda A + \lambda^2 E_2)\boldsymbol{v_2} \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{v_1}$ は λ に属する固有ベクトルである．

(2) $A\boldsymbol{v_1} = \lambda\boldsymbol{v_1}$, かつ，$A\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_1} + \lambda\boldsymbol{v_2}$ より，

$$A\begin{pmatrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

がいえる．

例題 8.12

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ のジョルダン標準形と変換行列を求めよ．

解　まず，固有値をもとめると，1 のみである．これに対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．次に，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と平行でないベクトル，例えば，$\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとると，$\boldsymbol{v_1} := (A - E_2)\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ となり，これは固有値 1 に属する固有ベクトルである．よって，

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

問 8.31　次の 2×2 行列について対角化可能な行列は対角化し，不可能なものについてはそのジョルダン標準形とその変換行列を求めよ．(解答には複素数がでてくる場合もあります．)

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & -16 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

問 8.32　次の行列のジョルダン標準形と変換行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -8 & -4 & 3 \\ 6 & 4 & -2 \\ -21 & -9 & 8 \end{pmatrix}$

問 8.33　次の対称行列を，変換行列を直交行列にとることによって対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

問 8.34　A を奇数次の直交行列とする．このとき，A は必ず 1 または -1 を固有値としてもつことを示せ．

問 8.35　n 次正方行列 A, B が相似であれば $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ であることを示せ．

問 8.36　A を対角化可能な $n \times n$ 行列として，固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする．このとき，n 個の $n \times n$ 行列 $I_1, \cdots, I_n$ で，$I_i^2 = I_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $i \neq j$ なら $I_i I_j = 0$ を満たすものを用いて，

$$A = \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \cdots + \lambda_n I_n$$

と書けることを示せ．このように A を表したとき，A^m はどのように表されるか．

問 8.37　2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $a_{n+1} = 4a_n - b_n$, $b_{n+1} = 2a_n + b_n$ という 2 つの漸化式で定める．

(1) $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ と表したときの行列 A を求め，$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を A, a_1, b_1 を使って表せ.

(2) a_n, b_n を n の式で書け.

(3) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_1 = b_1 = 1$, $a_{n+1} = -a_n - b_n$, $b_{n+1} = 9a_n + 5b_n$ として定めたとき，上と同様にして a_n, b_n を n の式で表せ.

問題の解答

問 1.1　(1) $2A - 3B + C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) 計算により示される.

問 1.2　(1) $X = \begin{pmatrix} -\frac{14}{5} & -\frac{7}{5} \\ -\frac{12}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$.

(2) $X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) $X = \begin{pmatrix} \frac{32}{19} & \frac{15}{19} \\ \frac{29}{19} & \frac{12}{19} \\ -\frac{10}{19} & \frac{17}{19} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -\frac{10}{19} & -\frac{13}{19} \\ \frac{4}{19} & \frac{1}{19} \\ -\frac{4}{19} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}$.

問 1.3　(1) $AD = 13,\ AC = \begin{pmatrix} -10 & -24 \end{pmatrix},\ AE = \begin{pmatrix} -13 & -24 & 23 \end{pmatrix}$,
$DA = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 2 \\ -15 & 20 & 5 \\ 3 & -4 & \end{pmatrix}$.

(2) $BC = \begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, BD = \begin{pmatrix} -19 \\ 11 \end{pmatrix}, BE = \begin{pmatrix} 13 & 19 & -26 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$,

$CB = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 6 \\ -5 & 17 & 7 \\ 6 & -33 & -14 \end{pmatrix}$.

(3) $EC = \begin{pmatrix} -33 & 24 \\ 14 & -39 \\ 19 & 8 \end{pmatrix}$, $ED = \begin{pmatrix} 44 \\ -5 \\ -17 \end{pmatrix}$, $AE = \begin{pmatrix} -13 & -24 & 23 \end{pmatrix}$,
$BE = \begin{pmatrix} 13 & 19 & -26 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

問 1.4　A, B を n 次対角行列とし，さらに $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ と書くとする．このとき仮定から，$i \neq j$ なら $a_{ij} = 0$, $b_{ij} = 0$ となることに注意する．AB の (i,j) 成分 は，$i \neq j$ のとき $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$ となるので，AB も対角行列となる．

問 1.5
(1) 計算により示せる．
(2) (1) により $A^2 - 4A + 7E_2 = O$ がいえる．また，$2A^3 - 3A^2 - 7A + 3E_2 = (2A + 5E_2)(A^2 - 4A + 7E_2) - A - 32E_2 = -A - 32E_2$ より

$$2A^3 - 3A^2 - 7A + 3E_2 = \begin{pmatrix} -34 & 3 \\ -1 & -34 \end{pmatrix}$$

がいえる．

問 1.6　$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

問 1.7

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

問 1.8

(1) $2CA - BA = \begin{pmatrix} 6 & -41 & -29 \\ -10 & -5 & 15 \end{pmatrix}$.

(2) $(B-3C)A - (2C+B)A = \begin{pmatrix} -20 & 45 & 55 \\ 35 & -10 & -65 \end{pmatrix}$.

(3) $(B+C)(C-B)A = \begin{pmatrix} -2 & 142 & 68 \\ 17 & -107 & -78 \end{pmatrix}$.

問 1.9

$$\begin{aligned} a &= -5x + 6y + 15z \\ b &= 14x - 5y - 41z \\ c &= -4x + 18y + 26z \end{aligned}$$

問 1.10

(1) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

問 1.11
(1) $(2x^2 + 2y^2 - 2xy - 10yz + 6xz)$
(2) $(x^2 + z^2 - 2xy - 2yz)$

問 1.12
(1)
$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}.$$
$${}^tAA = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}.$$
(2) $A = aE + bI$, ${}^tA = aE - bI$.

問 1.13 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ とする．
(1) $\lambda(AB)$ の (i,j) 成分は
$$\lambda\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right) \tag{1.13.1}$$
$(\lambda A)B$ の (i,j) 成分は
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(a_{ik})b_{kj} \tag{1.13.2}$$
$A(\lambda B)$ の (i,j) 成分は
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\lambda b_{kj}) \tag{1.13.3}$$
となる．(1.13.1)=(1.13.2)=(1.13.3) が容易に確かめられるので (1) が示される．
(2) $(AB)C$ の (i,j) 成分は
$$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} \tag{1.13.4}$$

$A(BC)$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj} \right) \tag{1.13.5}$$

となる．(1.13.4)=(1.13.5) が容易に確かめられるので (2) が示される．
(3) から (6) も同様の方法で示せる．

問 1.14

(1) (18)

(2) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -5 & 1 & -4 \\ 15 & -3 & 12 \end{pmatrix}$

問 1.15

(1)

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$b = 0, c = 0$ を満たさなければならない．

(2)

$$AC = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$c = 0, a = d$ を満たさなければならない．

(3) (1), (2) より，$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ の形をしていなくてはいけない．とこ

ろがこのとき，任意の 2 次行列 X に対して $XA = AX$ を満たすので $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ である．

問 1.16

(1) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ より $AB \neq BA$.

(2) $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2B^2$.

問 1.17

(4) を示す．$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ と書く．$\mathrm{tr}(AB)$ や $\mathrm{tr}(BA)$ を考えるには，AB, BA の対角成分のみを考えればよいので，AB, BA の対角成分がどうなっているかをみる．このとき，AB の (i,i) 成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$, BA の (i,i) 成分は $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}$ となる．すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}\right) \\
&= \mathrm{tr}(BA).
\end{aligned}$$

よって示された．(1), (2), (3) についても同様に示される．

問 1.18 $AB - BA = rE$ となる A, B があったとする.（ただし，$r \neq 0$.）このとき，$\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(rE) \neq 0$ となる．ところが，左辺は $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$ となり矛盾である.

問 1.19 (1) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

問 1.20
(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(2) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & \frac{n(n-1)}{2}a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. （数学的帰納法を用いる.）

問 1.21 $X = E_n X = (YA)X = Y(AX) = YE_n = Y$.

問 1.22
(1) ${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA$ より示される.
(2) ${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA)$ より示される.
(3) $(A + {}^tA) + (A - {}^tA) = 2A$. ここで，$B = (A + {}^tA)/2$, $C = (A - {}^tA)/2$ とおくと，(1), (2) より B は対称行列，C は交代行列で $A = B + C$ となる.
(4) (3) を用いる.

$$B = (A + {}^tA)/2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = (A - {}^tA)/2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -10 \\ 5 & 0 & 3 \\ 10 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

問 1.23

(1) X は対称行列より $X={}^tX$．また，X は交代行列より $X=-{}^tX$．以上より，$X=-{}^tX=-X$ となり $X=O$.

(2) $A=B_1+C_1$, $A=B_2+C_2$ と書けたとする．すると，$B_1+C_1=B_2+C_2$ となる．よって，$B_1-B_2=C_2-C_1$ となる．ここで，$X=B_1-B_2=C_2-C_1$ とおく．すると，${}^tX={}^t(B_1-B_2)={}^tB_1-{}^tB_2=B_1-B_2=X$ より，X は対称行列である．また，${}^tX={}^t(C_2-C_1)={}^tC_2-{}^tC_1=-C_2+C_1=-X$ より，X は交代行列である．よって，(1) より $X=O$ つまり $B_1=B_2$ かつ $C_1=C_2$ がいえる．

問 1.24

(1) $(1-x^n)=(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})$.

(2) $A^n=O$ とする．すると，(1) より $E=(E-A)(E+A+\cdots+A^{n-1})$ が成り立つ．また，$(E+A+\cdots+A^{n-1})(E-A)=E$ が成り立つので，$E-A$ は正則行列である．

(3) (2) の式より $(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{n-1}$ である．

問 1.25

(1) AB は対称行列より，${}^t(AB)=AB$．一方，A, B も対称行列より，${}^t(AB)={}^tB{}^tA=BA$. よって，$AB=BA$.

(2) $AB=BA$ とする．${}^t(AB)={}^t(BA)={}^tA{}^tB$ となる．ところが，A, B は対称行列より，${}^tA{}^tB=AB$. よって，${}^t(AB)=AB$ が成り立つ，つまり AB は対称行列である．

問 1.26

$A^m=O$, $B^n=O$ となったとする．

(1)

$$(A+B)^{m+n}=\sum_{p=0}^{m+n}\binom{m+n}{p}A^pB^{m+n-p}$$

と書ける．ただし，$\binom{m+n}{p} = \frac{(m+n)!}{(m+n-p)!p!}$． 一方，$0 \leq p \leq m$ ならば $B^{m+n-p} = O$ となり，$m < p \leq m+n$ ならば $A^p = O$ となるので $(A+B)^{m+n} = O$ となる．したがって，$A+B$ はべき零行列である．
(2) $(AB)^m = A^m B^m = O$ より AB はべき零行列である．

問 1.27
A は交代行列より ${}^tA = -A$ である．
(1) ${}^t(A^2) = {}^t(A \cdot A) = {}^tA{}^tA = (-A)(-A) = A^2$ より A^2 は対称行列である．
(2) ${}^t(A^3) = {}^t(A \cdot A^2) = {}^t(A^2){}^tA = (A^2)(-A) = -A^3$ より A^3 は交代行列である．
(3) n が奇数のとき，A^n は交代行列，n が偶数のとき，A^n は対称行列となる.（数学的帰納法を用いる.）

問 1.28
(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^3 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
(2) n が偶数のとき $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, n が奇数のとき $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
（数学的帰納法を用いる.）

問 1.29 $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，$A^{6k+1} = A$, $A^{6k+2} = A^2$,

$A^{6k+3} = A^3$, $A^{6k+4} = A^4$, $A^{6k+5} = A^5$, $A^{6k+6} = E_3$. ただし，k は非負の整数である．

問 1.30　$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を満たすとする．ここで，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}.$$

したがって，$c(a+d) = 0$ かつ $b(a+d) = \alpha$ より $c = 0$ となる．よって，$a^2+bc = 0$, $bc+d^2 = 0$ から $a = 0$, $d = 0$ がいえる．ところがこのとき，$b(a+d) = 0$ となり矛盾である．

問 1.31

(1) $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とおく．ここで，A, B は上三角行列より，$i > j$ のとき $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$ となる．ところで，積 AB の (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ である．$i > j$ のときを考える．$1 \leq k \leq i$ のとき $a_{ik} = 0$, $j+1 \leq k \leq n$ のとき $b_{kj} = 0$ である．よって，$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$ となり，AB は上三角行列である．

(2) も同様に示される．

問 1.32　A, B を成分表示し，直接計算すればよい．

問 1.33　A が n 次正則行列ならば，ある n 次正則行列 B が存在して $AB = BA = E_n$ となる．よって，${}^t(AB) = {}^t(BA) = E_n$．一方，${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$, ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$ より ${}^tB{}^tA = {}^tA{}^tB = E_n$ となり，${}^tA$ も正則行列である．

問 1.34

(1) $A^2 - 4A + 3E_2 = O$ より，$(A-4E_2)A = A(A-4E_2) = -3E_2$ が成立する．したがって，$(-(1/3)A+(4/3)E_2)A = A(-(1/3)A+(4/3)E_2) = E_2$

となるので A は正則行列である．
(2) (1) より $A^{-1} = \frac{4}{3}E_2 - \frac{1}{3}A$ である．

問 1.35　もし，A が正則行列となったとすると，ある行列 C が存在して $CA = AC = E_n$ となる．一方，$O = C(AB) = (CA)B = B$ より $B = O$ となり矛盾である．B が正則行列になる場合についても同様である．

問 2.1　(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問 2.2　$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & 1 & \cdots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$

問 2.3　（省略）

問 2.4　第 1 行の -3 倍を第 2 行に加える変形を先に行えば
$\begin{pmatrix} 1 & 12 & -17 & 9 \\ 0 & 7 & -10 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, 後から行えば $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 & 3 \\ -18 & 1 & -4 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ となる．このように基本変形の順序によって結果が異なるので, この 2 つの基本変形を同時に行うことはできない．

問 2.5 P_{ij} を右からかけることを，基本行列を列ベクトルに分割して考えれば，

$$\begin{aligned} AP_{ij} &= A(e_1 \ \cdots \ \overset{(i)}{e_j} \ \cdots \ \overset{(j)}{e_i} \ \cdots \ e_n) \\ &= (Ae_1 \ \cdots \ \overset{(i)}{Ae_j} \ \cdots \ \overset{(j)}{Ae_i} \ \cdots \ Ae_n) \\ &= (a_1 \ \cdots \ \overset{(i)}{a_j} \ \cdots \ \overset{(j)}{a_i} \ \cdots \ a_n) \end{aligned}$$

であるから，第 i 列と第 j 列が入れ替わる．同様に考えれば，$AP_i(c)$ は A の第 i 列を c 倍した行列，$AP_{ij}(c)$ は A の第 j 列に第 i 列の c 倍を加えた行列になる．

問 2.6 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & -18 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問 2.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & a+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+6 \end{pmatrix}.$$

例えば，問題の行列は，上記の基本変形を繰り返すことのより階段行列に変形できる．したがって，階数が 2 になるのは $a=-6$ のときである．

問 2.8 $a=-1$ または $a=2$ のとき階数 2 であり，それ以外のときは階数 3 となる．

問 2.9　（略解）

(1) 解なし.

(2) （解答例）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\lambda_1,\ \lambda_2 \text{ は任意}),$$

または, $\begin{cases} x = -11z - w - 11 \\ y = 6z + 7 \end{cases}$ （z, w は任意）.

(3) （解答例）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \text{ は任意}),$$

または, $\begin{cases} x = -z - \frac{1}{2} \\ y = -z + \frac{1}{2} \end{cases}$ （z は任意）.

(4) 解なし.

問 2.10　与えられた連立 1 次方程式の左辺の係数行列は

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{pmatrix}$$

であり，与えられた連立 1 次方程式がただ 1 つの解をもつための必要十分条件は，A が階数 4 であることである．最終結果は，$(a,b) \neq (0,0)$ かつ $(c,d) \neq (0,0)$ となる.

問 2.11 （略解）拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & b \\ -2 & -1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ であり，階段行列まで変形すると，$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$ である．解をもつための必要十分条件は，$b=1$ である．$b=1$ のとき，$a=1$ なら自由度は 2 であり，$a \neq 1$ なら自由度は 1 である．

問 2.12 拡大係数行列

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\
\longrightarrow\ &\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (1\text{ 行を }2\text{ 行へ}, 2\text{ 行を }3\text{ 行へ}, 3\text{ 行を }1\text{ 行へ入れ替えた}) \\
\longrightarrow\ &\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \quad (1\text{ 行の }-2\text{ 倍を }2\text{ 行へ}, 1\text{ 行の }-3\text{ 倍を }3\text{ 行へ足し} \\
\longrightarrow\ &\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3\text{ 行を }-\tfrac{1}{4}\text{ 倍した}) \\
\longrightarrow\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3\text{ 行の }-2\text{ 倍を }1\text{ 行へ}, 3\text{ 行を }2\text{ 行へ足した})
\end{aligned}
$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2\text{ 行を }-1\text{ 倍した})$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (2\text{ 行の }-2\text{ 倍を }3\text{ 行に足した})$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3\text{ 行を }5\text{ で割った})$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3\text{ 行の }-2\text{ 倍を }2\text{ 行に足した})$$

よって，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1] \end{pmatrix}$ （α は任意）.

問 2.13　はき出し法を使う.

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3\text{ 行を }2\text{ 行に足した}) \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2\text{ 行を }1\text{ 行に足した}) \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1\text{ 行を }2\text{ 行に足した}) \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2\text{ 行を }3\text{ 行に足した})
\end{aligned}
$$

$a=0$ のとき逆行列はなく, $a \neq 0$ のとき逆行列が存在し, それは $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{a} & \frac{2}{a} & \frac{3}{a} \end{pmatrix}$ である.

問 2.14　（略解）正則行列である. 逆行列は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 5 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

問 2.15 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問 2.16 $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問 2.17 $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

問 3.1 (1) 7 (2) 6 (3) 11 (4) -1 (5) -2 (6) -4 (7) -18

問 3.2 (1) 奇 (2) 偶 (3) 偶 (4) 奇

問 3.3 (1) $-$ (2) $+$ (3) $-$

問 3.4 （省略）

問 3.5 (1) $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ (2) $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ (3) $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

問 3.6 (1) $k^n a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

(2) n が偶数のとき，$(-1)^{n/2}a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}$, n が奇数のとき，$(-1)^{(n-1)/2}a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}$. 2 つの式は $(-1)^{(n-1)n/2}a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}$ と 1 つの式で表すこともできる.

問 3.8 (1) -14 (2) -1 (3) 21 (4) 32

問 3.9 (1) kl (2) $-klm$ (3) 0

問 3.10 (1) 2 (2) 0 (3) 120 (4) 7/36 (5) 12 (6) 56
(7) 60 (8) 14 (9) 0 (10) 16 (11) -7 (12) 32 (13) 0

問 3.11 (1) $-|A|$ (2) $|A|$ (3) $|A|$ (4) $2|A|$

問 3.12 (1) $-k|A|$ (2) $-k^3|A|$

問 3.14 (1) -50 (2) 17 (3) -43 (4) -1 (5) -46 (6) -3
(7) -3 (8) -1 (9) -30 (10) 63

問 3.16 (1) $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (3) 逆行列をもたない.
(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ (6) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
(7) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 7 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

問 3.17 (1) $x_1 = \dfrac{1}{3},\ x_2 = \dfrac{1}{3},\ x_3 = 0.$ (2) $x_1 = 4,\ x_2 = -3,\ x_3 = 0.$
(3) $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{1}{5},\ x_3 = \dfrac{1}{5}.$ (4) $x_1 = \dfrac{13}{15},\ x_2 = \dfrac{7}{15},\ x_3 = \dfrac{1}{5}.$

問 4.1 平面上のベクトル $\boldsymbol{p} = (a, b)$, $\boldsymbol{q} = (x, y)$ のなす角を θ とするとき，内積の定義から，

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| \cos\theta$$

なので，

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}.$$

例題 4.1 より,

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = (a,b)\cdot(x,y) = ax+by,$$
$$|\boldsymbol{p}| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad |\boldsymbol{q}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

となることが示されているので,

$$\cos\theta = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

が得られる.

問 4.2 空間上のベクトル $\boldsymbol{p} = (a,b,c)$, $\boldsymbol{q} = (x,y,z)$ のなす角を θ とするとき, 内積の定義から,

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta$$

なので,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}.$$

例題 4.1 より,

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = (a,b,c)\cdot(x,y,z) = ax+by+cz,$$
$$|\boldsymbol{p}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}, \quad |\boldsymbol{q}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

となることが示されているので,

$$\cos\theta = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

が得られる.

問 4.3　平面上のベクトルを $\boldsymbol{p}=(a,b)$, $\boldsymbol{q}=(x,y)$ とするとき，$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}=(a,b)-(x,y)=(a-x,b-y)$ であるから，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}| &= \sqrt{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}\\ &= \sqrt{(a-x,b-y)\cdot(a-x,b-y)}\\ &= \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}.\end{aligned}$$

問 4.4　空間上のベクトルを $\boldsymbol{p}=(a,b,c)$, $\boldsymbol{q}=(x,y,z)$ とするとき，$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}=(a,b,c)-(x,y,z)=(a-x,b-y,c-z)$ であるから，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}| &= \sqrt{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}\\ &= \sqrt{(a-x,b-y,c-z)\cdot(a-x,b-y,c-z)}\\ &= \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}.\end{aligned}$$

問 4.5　平面上のベクトル $\boldsymbol{p}=(a,b)$, $\boldsymbol{q}=(x,y)$ が垂直である条件は，系 4.7 より $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=0$ である．よって，

$$(a,b)\cdot(x,y)=ax+by=0$$

が求める条件である．

問 4.6　空間上のベクトル $\boldsymbol{p}=(a,b,c)$, $\boldsymbol{q}=(x,y,z)$ が垂直である条件は，系 4.7 より $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=0$ である．よって，

$$(a,b,c)\cdot(x,y,z)=ax+by+cz=0$$

が求める条件である．

問 4.7　平面上のベクトルを $\boldsymbol{p}=(1,0)$, $\boldsymbol{q}=(\sqrt{3},\sqrt{3})$ とするとき，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ のなす角 θ は内積の定義と系 4.7 より，

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}=\frac{(1,0)\cdot(\sqrt{3},\sqrt{3})}{|(1,0)||(\sqrt{3},\sqrt{3})|}=\frac{\sqrt{3}}{1\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

よって，求める角は $\frac{\pi}{4}$ ラジアン $(=45^\circ)$ である．

問 4.8　空間上のベクトルを $\boldsymbol{p} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{q} = (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 2)$ とするとき，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ のなす角 θ は内積の定義と系 4.7 より，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} = \frac{(1,1,1)\cdot(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2},2)}{|(1,1,1)||(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2},2)|}\\ &= \frac{(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})+2}{\sqrt{3}\times\sqrt{(2-\sqrt{2})^2+(2+\sqrt{2})^2+4}} = \frac{6}{\sqrt{3}\times\sqrt{16}}\\ &= \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

よって，求める角は $\frac{\pi}{6}$ ラジアン $(= 30°)$ である．

問 4.9　平行四辺形の面積 S は P_k を 原点 O と見ると，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_i}$, $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_j}$ の作る平行四辺形だから，

$$\begin{aligned}S &= \left|\begin{vmatrix} x_i - x_k & y_i - y_k \\ x_j - x_k & y_j - y_k \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_i - x_k & y_i - y_k \\ 1 & x_j - x_k & y_j - y_k \end{vmatrix}\right|\\ &= \left|\begin{vmatrix} 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \end{vmatrix}\right|.\end{aligned}$$

i, j, k を 1, 2, 3 のどれにとっても行列式は行の入れ替えだから符合しかかわらないので，どんな平行四辺形も同じ行列式の絶対値となる．

問 4.10　問 4.9 より，3 点 A$(1,-3)$, B$(-2,2)$, C$(3,-1)$ を頂点とする平行四辺形の面積は

$$\left|\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right| = |2-9+2-6+6+1| = 4.$$

三角形の面積は平行四辺形の面積の半分だから，△ABC の面積は 2 である．

問 4.11　3 点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$, $\mathrm{P}_3(x_3, y_3)$ が一直線上にあれば，これらを頂点とする平行四辺形の面積は 0 である．したがって，問 4.9 より，

$$\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right| = 0$$

となる．逆に，3 点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$, $\mathrm{P}_3(x_3, y_3)$ が一直線上にな無ければ，これらを頂点とする平行四辺形の面積は 0 ではない．したがって，問 4.9 より，

$$\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right| \neq 0$$

となり，対偶を取って十分性が示せた．

問 4.12

(1) 各直線の法線ベクトルは定理 4.15 より $(3, -4)$ と $(5, 12)$ であり，この 2 つのベクトルのなす角は直線のなす角と同じであるので，θ である．よって，内積の定義から

$$\cos\theta = \frac{(3, -4) \cdot (5, 12)}{|(3, -4)||(5, 12)|} = \frac{15 - 48}{5 \times 13} = \frac{-33}{65}$$

である．θ は第一象限の角だから求める余弦は

$$\cos\theta = \frac{33}{65}$$

となる．

(2) ヘッセの標準形の定義 (例題 4.3) に代入して求めるが，$3x-4y+5=0$ の場合は $-3x+4y-5=0$ として求める．このとき，

$$m=\frac{-3}{\sqrt{9+16}},\quad n=\frac{4}{\sqrt{9+16}},\quad d=\frac{5}{\sqrt{9+16}}$$

となる．よって，直線 $3x-4y+5=0$ のヘッセの標準形は

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=1.$$

直線 $5x+12y-26=0$ については

$$m=\frac{5}{\sqrt{25+144}},\quad n=\frac{12}{\sqrt{25+144}},\quad d=\frac{26}{\sqrt{25+144}}$$

なので，ヘッセの標準形は

$$\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y=2$$

である．

(3) 原点 O からそれぞれの直線に引いた垂線の足は，(md,nd) だから，直線 $3x-4y+5=0$ に引いた垂線の足は $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ であり，直線 $5x+12y-26=0$ に引いた垂線の足は $(\frac{5}{13}\times 2,\frac{12}{13}\times 2)=(\frac{10}{13},\frac{24}{13})$ である．

問 4.13　2 直線 $3x-4y+5=0$, $3x-4y-15=0$ のヘッセの標準形はそれぞれ

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=1,\quad \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y=3$$

である．このとき，例題 4.3 より，原点からこの直線までの距離はそれぞれ 1, 3 である．したがって，この 2 直線の間の距離は $3-1=2$ である．

問 4.14　2 点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$ を通る直線上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると，3 点 P_1, P_2,P は同一直線上にあるので，問 4.11 より，点 P は方程式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

を満たす．したがって，これが求める直線の方程式である．

問 4.15　方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ である．したがって，定理 4.12 より，

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

となる．

問 4.16　内積の定義から，

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{e}||\boldsymbol{l}|} = (1, 0) \cdot (l, m) = l, \\ \cos\eta &= \frac{\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{l}|} = (0, 1) \cdot (l, m) = m \end{aligned}$$

となる．

問 4.17　余弦はコサインのことで，問 4.16 より，方向余弦の成分が余弦 (cos) を用いて表されているからである．さらに，空間の場合も，ベクトル $\boldsymbol{l}$ が x, y, z の各座標軸となす角をそれぞれ α, β, γ とするとき，$l^2 + m^2 + n^2 = 1$ なら，$l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$ と表されるから，方向を表す余弦，すなわち，方向余弦と呼ばれる．

問 4.18　問 4.17 より，ベクトル $\boldsymbol{l}$ が x, y, z の各座標軸となす角を表している．すなわち，各座標軸となす角をそれぞれ α, β, γ とするとき，$l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$ と表される．

問 4.19 $\boldsymbol{a} = (1, -3, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 0, 3)$ とするとき，例題 4.5 より，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \left(\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-9, -4-3, -6) = (-9, -7, -6).\end{aligned}$$

問 4.20

(1) 定理 4.17 の 1 の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を両方とも $\boldsymbol{e}$ として，

$$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}$$

となる．移項して

$$2\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$$

となるので，$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ を得る．$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ に関しても同様である．

(2) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{f}$ の作る平行四辺形は一辺の長さ 1 の正方形だから面積は 1 であり，人差し指の方向を x 軸 の $\boldsymbol{e}$, 中指の方向を y 軸の $\boldsymbol{f}$ とすると親指の方向は z 軸方向となり，長さが 1 であることから，$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}$ の定義からこれは $\boldsymbol{g}$ になる．$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f} = -\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{e}$ は，定理 4.17 の 1 から従う．

(3) これは上と同様である．

(4) これも上と同様である．

問 4.21 原点と 3 点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\mathrm{P}_3(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ を頂点とする平行四辺形の面積 S は，外積の定義から $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ の大きさと同じである．例題 4.5 より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

であり，このベクトルの大きさが求める面積であるから，

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

となる．

問 4.22　原点 O と 3 点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\mathrm{P}_3(x_3, y_3, z_3)$ をそれぞれ結ぶベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ の作る平行 6 面体の体積を V とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ の作る平行四辺形の底面積 S は，定義から

$$S = |\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}|$$

である．また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}$ のなす角を θ とすると，高さ h は

$$h = |\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}||\cos\theta|$$

である．したがって，体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= Sh = |\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}||\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}||\cos\theta| \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_3}| \\
&= |\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (x_3, y_3, z_3)| \\
&= |\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3| \\
&= |\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3| \\
&= |\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}|
\end{aligned}$$

となる．

問 4.23　原点 O と 3 点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\mathrm{P}_3(x_3, y_3, z_3)$ が同一平面上にあれば，原点 O と 3 点 P_1, P_2, P_3 をそれぞれ結ぶベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ の作る平行 6 面体の体積 V は 0 であるから，問 4.22 より，

$$V = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right| = 0$$

であることがわかる．逆に，$V \neq 0$, すなわち，原点 O と 3 点 P_1, P_2, P_3 をそれぞれ結ぶベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ の作る平行 6 面体の体積 V が 0 でないなら，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ の作る平行四辺形の上の高さ $h = |\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}||\cos\theta|$ が 0 でなくなり，$\cos\theta \neq 0$ となる．よって，P_3 はこの平行四辺形を含む平面には含まれない．ゆえに，3 点 P_1, P_2, P_3 は同一平面上にない．

問 4.24　$\boldsymbol{a} = (1, -3, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 0, 3)$, $\boldsymbol{c} = (1, -1, 0)$ とするとき，問 4.22 より，これらの作る平行 6 面体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \left| \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right| \\ &= |0 + 4 - 9 - 0 + 3 - 0| \\ &= 2. \end{aligned}$$

問 5.1　k_1, k_2, k_3 はパラメータとする．

(1) 固有値 0, 固有ベクトル $k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) 固有値 0, 固有ベクトル $k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 固有値 1, 固有ベクトル $k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

固有値 -1, 固有ベクトル $k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(3) 固有値 2, 固有ベクトル $k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 固有値 -2, 固有ベクトル $k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

固有値 3, 固有ベクトル $k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4) 固有値 -2, 固有ベクトル $k_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 7, 固有ベクトル $k_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(5) 固有値 a, 固有ベクトル $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(6) 固有値 1, 固有ベクトル $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

固有値 2, 固有ベクトル $k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(7) 固有値 1, 固有ベクトル $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

固有値 5, 固有ベクトル $k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(8) 固有値 -1, 固有ベクトル $k_1\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, 固有値 2, 固有ベクトル $k_2\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$,
固有値 5, 固有ベクトル $k_3\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$.

問 5.2

(1) $P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

(2) $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

問 5.3

(1) 対角化可能．$P=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\4&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(2) 対角化不可能.

(3) $a=b$ のとき，対角化不可能．$a\neq b$ のとき，対角化可能であり，
$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&b-a\end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$.

問 5.4

(1) $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$.

(2) $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

問 5.5

(1) $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

問 5.6

(1) $P = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. したがって，

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 \cdot 2^n + (-3)^{n+1} & -8 \cdot 2^n + 8 \cdot (-3)^n \\ 3 \cdot 2^n + (-3)^{n+1} & -3 \cdot 2^n + 8 \cdot (-3)^n \end{pmatrix}.$$

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. したがって，

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 5^n & (-1)^n - 5^n \\ (-1)^n - 5^n & (-1)^n + 5^n \end{pmatrix}$$

問 5.7 $a + b$, $-(a + b)$, $a - b$, $-(a - b)$.

問 5.8 A が固有値 0 をもつと仮定する．このとき，零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる．この式の両辺に左から A^{-1} を掛けると，$\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり，矛盾である．

問 5.9　λ を A の固有値，$\boldsymbol{x}$ をそれに属する固有ベクトルとする．すると，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が成り立つ．よって，$A^3\boldsymbol{x} = A^2(A\boldsymbol{x}) = A^2(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda A(A\boldsymbol{x}) = \lambda^2 A\boldsymbol{x} = \lambda^3\boldsymbol{x}$. また，$A^3 = A$ より，$A^3\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. ところで，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ だから，$\lambda^3 = \lambda$ となる．よって，$\lambda = 0,\ 1,\ -1$ となる．

問 5.10　ある正則行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

とかける.（ただし，任意の i に対して $a_i \geq 0$.）このとき，

$$B = P\begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{a_n} \end{pmatrix}P^{-1}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} B^2 &= \left(P\begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{a_n} \end{pmatrix}P^{-1}\right)^2 \\ &= P\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= A \end{aligned}$$

となる．

問 5.11　(1) 行列式の定義より，$xE - A$ の対角成分の積をとったときのみ，x^{n-1} はでてくる．よって，$(x-a_{11})(x-a_{22})\cdots(x-a_{nn})$ の x^{n-1} の係

数をみればよい．すると，$-\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ となる．ところが，$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ より x^{n-1} の係数は $-\mathrm{tr}A$ である．
(2) $\varPhi_A(x)$ の定数項は $\varPhi_A(0)$ である．ところで，固有多項式の定義より，$\varPhi_A(0) = |-A|$ となる．よって，$\varPhi_A(x)$ の定数項は $(-1)^n|A|$ となる．

問 5.12 (1)

$$
\begin{aligned}
\varPhi_{P^{-1}AP}(x) &= |xE - P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}(xE)P - P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}||xE - A||P| \\
&= |xE - A||P^{-1}||P| \\
&= |xE - A| \\
&= \varPhi_A(x)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\varPhi_{{}^tA}(x) &= |xE - {}^tA| \\
&= |{}^t(xE) - {}^tA| \\
&= |{}^t(xE - A)| \\
&= |xE - A| \\
&= \varPhi_A(x)
\end{aligned}
$$

問 5.13

$$
\begin{aligned}
\varPhi_A(x) &= |xE - A| \\
&= |xE - A_1||xE - A_2| \\
&= \varPhi_{A_1}(x) \cdot \varPhi_{A_2}(x)
\end{aligned}
$$

問 5.14

(1) $\begin{cases} x_n = (12 \cdot 3^n - 5(-4)^n)/7 \\ y_n = (-2 \cdot 3^n - 5(-4)^n)/7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_n = (1 + 5^n)/2 \\ y_n = (1 + 5^n)/2 \\ z_n = (5^n - 3)/2 \end{cases}$

問 5.15 $x_n = ((-2)^n + 3 \cdot 2^n - 10)/6.$

問 5.16

(1) $\begin{cases} x_1 = (8e^{2t} - 3e^{-3t})/5 \\ x_2 = (3e^{2t} - 3e^{-3t})/5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 = (2e^t - 2e^{-5t})/3 \\ x_2 = (2e^t - 7e^{-2t} + 8e^{-5t})/3 \\ x_3 = (2e^t - 7e^{-2t} + 2e^{-5t})/3 \end{cases}$

問 5.17 $y = (16e^t - 9e^{2t} + 5e^{-2t})/12.$

問 6.1 A, B を $n \times m$ 行列とし，$k \in \mathbb{K}$ すると，$A + B$ および kA が定義され，ともに $n \times m$ 行列になる．よって，$\mathrm{Mat}(n, m)$ には加法とスカラー倍が定義される．この 2 つの演算に対して，(V1)〜(V8) が成り立つことは，行列の加法とスカラー倍に関する事実より明らかである．ただし，零ベクトルはすべての成分が 0 である行列（零行列）であり，行列 $A = (a_{ij})$ の逆ベクトル $-A$ は $(-a_{ij})$ で与えられる．

問 6.2 $\mathbb{K}^n$ の場合と同様にして示すことができる．ただし，零ベクトルはすべての項が 0 である数列 (0) であり，数列 (a_n) の逆ベクトルは $(-a_n)$ で与えられることに注意する．

問 6.3 このように加法とスカラー倍を定義すると，任意の $f, g \in C(a, b)$ に対し，$f + g$ は $[a, b]$ で定義された連続関数になる．すなわち，$f + g \in C(a, b)$ がわかる．さらに，任意の実数 k に対しても $kf \in C(a, b)$ であることがわかるので，加法とスカラー倍が矛盾なく定義される．この定義による零ベクトルは，すべての $x \in [a, b]$ に対して 0 を対応させる関数であり，$f \in C(a, b)$ の逆ベクトル $-f$ は $(-f)(x) = -f(x)$ により定義され

る関数である．他のベクトル空間の公理が成り立つことは直接確かめられる．

問 6.4 $\mathbb{K}_n[x]$ を $\mathbb{K}$ の元を係数とする n 次以下の x の多項式全体の集合とする．このとき，加法とスカラー倍は

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$
$$k(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = (ka_0) + (ka_1)x + \cdots + (ka_n)x^n$$

で定義されるので，$\mathbb{K}_n[x]$ に加法とスカラー倍が矛盾なく定義される．この定義による零ベクトルは，次数 0 の多項式 0 であり，$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ の逆ベクトルは $(-a_0)+(-a_1)x+\cdots+(-a_n)x^n$ である．他のベクトル空間の公理は容易に確かめられる．

問 6.5 $V = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$ とおく．$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in V$, $k \in \mathbb{K}$ に対して，$A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$, $A(k\boldsymbol{x}_1) = kA\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ となるので，V には加法とスカラー倍が定義される．他のベクトル空間の公理は $\mathbb{K}^m$ と同様に確かめられる．

問 6.6 (i, j) 成分が 1 で，他の成分がすべて 0 である $n \times m$ 行列を $E_{i,j}$ で表す．このとき，$\{\, E_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m \,\}$ が $\mathrm{Mat}(n, m)$ の基底になることを示す．$\sum_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m} k_{i,j}E_{i,j} = O_{n,m}$ とする．ただし，右辺の $O_{n,m}$ は，すべての成分が 0 であるような $n \times m$ 行列である．このとき，両辺の各成分を比較することにより $k_{i,j} = 0$ がすべての $i,\ j$ に対して成り立つことが示される．よって，$\{\, E_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m \,\}$ は 1 次独立になることがわかる．また，任意の $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}(n, m)$ に対して，$A = \sum_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m} a_{i,j}E_{i,j}$ となるから $\{\, E_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m \,\}$ は生成系であることもわかる．以上から，$\{\, E_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m \,\}$ は $\mathrm{Mat}(n, m)$ の基底になることが示された．よって，$\mathrm{Mat}(n, m)$ の次元は nm になる．

問 6.7 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ に，行に関する基本変形を施すことにより，行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ を得る．ここで基本変形に関する性質から，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ になるので，ベクトル空間は $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^5 \mid B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ と表すことができる．ここで，$B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ を解くと，$x_1 = -2\alpha + 2\beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = -24\beta$, $x_4 = -10\beta$, $x_5 = \beta$（α, β は任意の実数）を得るので，例えば基底として $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -24 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．特に，次元は 2 となる．

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ に，行に関する基本変形を施すことにより，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ を得る．よって (1) と同様にして，例えば基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．特に，次元は 1 となる．

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ に，行に関する基本変形を施すことにより，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得る．よって (1) と同様にして，例えば基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る．特に，次元は 1 となる．

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に，行に関する基本変形を施すことにより，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 23 \end{pmatrix}$ を得る．よって (1) と同様にして，例えば基底として $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 0 \\ -23 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．特に，次元は 2 となる．

問 6.8 (1) $ae^x + be^{2x} = 0$ とおき，$x = 0$ および $x = 1$ を代入した式を考えると，$a + b = 0,\ ae + be^2 = 0$ を得る．これを解くと，$a = b = 0$ が得られる．よって，1 次独立になる．

(2) $a \sin x + b \cos x + c = 0$ とおき，$x = 0,\ x = \pi/4,\ x = \pi/2$ などを代入すると $b + c = 0,\ a + c = 0,\ -b + c = 0$ を得る．これを解くと，$a = b = c = 0$ が得られる．よって，1 次独立になる．

(3) $ae^x + bxe^x = 0$ とおき，$x = 0$ および $x = 1$ を代入した式を考えると，$a = 0,\ ae + be = 0$ を得る．これを解くと，$a = b = 0$ が

得られる．よって，1 次独立になる．

問 6.9 $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k = 0$ とする．ただし，右辺の 0 は恒等的に 0 となる関数である．ここで，$f_k(i+1/2)$ は $k=i$ のとき $(-1)^k$ であり，$k \neq i$ のとき 0 となることに注意すると，$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k f_k\right)(k+1/2) = 0$ $(1 \leq k \leq n)$ より $a_k = 0$ がすべての k に対して成り立つことがわかる．よって，任意の正の整数 n に対して $\{f_k(x)\}_{k=1}^{n}$ は $C(\mathbb{R})$ において 1 次独立になる．

問 6.10 $k\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ とおけば，$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ より $k = 0$ を得る．

問 6.11 $\sum_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{0}$ とする．これを変形すると $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} r_j\right)\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ を得る．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立だから，任意の i $(1 \leq i \leq n)$ に対して $\sum_{j=i}^{n} r_j = 0$ を得る．これを解くと $r_i = 0$ がすべての i $(1 \leq i \leq n)$ に対して成り立つことがわかり，$\{\boldsymbol{w}_i\}$ が 1 次独立になることがわかる．次に，$\{\boldsymbol{v}_i\}$ は基底であることから，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$ と表される．ここで，$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{w}_{i-1}$ $(2 \leq i \leq n)$ であることから，$\boldsymbol{x} = (a_1 - a_2)\boldsymbol{w}_1 + (a_2 - a_3)\boldsymbol{w}_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)\boldsymbol{w}_{n-1} + a_n \boldsymbol{w}_n$ が得られ，$\{\boldsymbol{w}_i\}$ は生成系になることもわかる．以上から，$\{\boldsymbol{w}_i\}$ が V の基底になることがわかった．

問 6.12 与えられた集合を V とおく．

(1) 部分空間にならない．実際，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$ に対して，$\dfrac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり，$\dfrac{1}{2}A \in V$ とならない．

(2) 部分空間になる．まず，$O \in V$．実際，$A,\ B \in V$, $k \in \mathbb{K}$ に対して，$A + B = (-{}^t\!A) + (-{}^t\!B) = -{}^t(A+B)$, $kA = k(-{}^t\!A) = -{}^t(kA)$ となるので，$A+B,\ kA \in V$ となる．

(3) 部分空間にならない．実際，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$ に

対して $\det A = \det B = 0$ であるので $A,\ B \in V$ であるが，$\det(A+B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ なので $A+B \in V$ とならない．

(4) 部分空間になる．まず，$O \in V$．実際，$A,\ A' \in V$, $k \in \mathbb{K}$ に対して，$(A+A')B - B(A+A') = AB - BA + A'B - BA' = O$, $(kA)B - B(kA) = k(AB - BA) = O$ となるので，$A+B,\ kA \in V$ となる．

(5) 部分空間にならない．実際，$A = -E_2$ とすると，$E_2,\ A \in V$ であるが，$E_2 + A = O$ より ${}^t(E_2+A)(E_2+A) = O \neq E_2$ となり $E_2 + A \in V$ を満たさない．

問 6.13 $V = \{\, A \in \mathrm{Mat}(n,n) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0 \,\}$ とおく．すべての成分が 0 である n 次正方行列は V に含まれるので，特に V は空でない．任意の $A, B \in V$ に対して，$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) = 0 + 0 = 0$ だから，$A + B \in V$ となる．また，任意の $k \in \mathbb{K}$, $A \in V$ に対して，$\mathrm{Tr}(kA) = k\,\mathrm{Tr}(A) = 0$ なので，$kA \in V$ となる．よって，V は $\mathrm{Mat}(n,n)$ の部分空間になる．

次に基底を求める．$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ で $i \neq j$ である i, j に対して，(i,j) 成分が 1 で，他がすべて 0 である n 次正方行列を $E_{i,j}$ とする．また，$1 \leq k \leq n-1$ に対して，(k,k) 成分が 1, (n,n) 成分が -1, 他がすべて 0 である n 次正方行列を E_k とする．明らかに，$\mathrm{Tr}(E_{i,j}) = 0$, $\mathrm{Tr}(E_k) = 0$ になるので，$E_{i,j}$, $E_k \in V$ が成り立つ．$\{E_{i,j}, E_k\}$ は V の基底になることを示す．まず，$\sum_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq n,\ i\neq j} r_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\leq k\leq n-1} r_k E_k = O_{n,n}$ とする．ただし，右辺の $O_{n,n}$ は，すべての成分が 0 であるような n 次正方行列である．このとき，左辺の (i,j) 成分を見ると，$i \neq j$ のときは $r_{i,j}$ であり，$1 \leq i = j \leq n-1$ のときは r_i となるので，両辺の各成分を比較することにより $r_{i,j} = 0$ がすべての $i \neq j$ に対して成り立ち，また，$r_k = 0$ がすべての $1 \leq k \leq n-1$ に対して成り立つことが示される．よって，$\{\, E_{i,j}, E_k\}$ は 1 次独立になることがわかる．また，任意の $A = (a_{i,j}) \in V$ に対して，$\mathrm{Tr}(A) = 0$ より $a_{n,n} = -\sum_{1\leq k\leq n-1} a_{k,k}$ が得られる．よって，

$A = \sum_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n,\ i\ne j} a_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\le k\le n-1} a_{k,k}E_k$ となるから $\{\, E_{i,j}, E_k\}$ は生成系であることもわかる．以上から，$\{\, E_{i,j}, E_k\}$ は V の基底になることが示された．また，これより V の次元は n^2-1 になる．

問 6.14 $V = \{\, A \in \mathrm{Mat}(n,n) \mid \mathrm{Tr}(AB) = 0\}$ とおく．すべての成分が 0 である n 次正方行列は V に含まれるので，特に V は空でない．任意の $A, A' \in V$ に対して，$\mathrm{Tr}((A+A')B) = \mathrm{Tr}(AB+AB') = \mathrm{Tr}(AB)+\mathrm{Tr}(A'B) = 0+0 = 0$ だから，$A+A' \in V$ となる．また，任意の $k \in \mathbb{K}$, $A \in V$ に対して，$\mathrm{Tr}((kA)B) = \mathrm{Tr}(k(AB)) = k\,\mathrm{Tr}(AB) = 0$ なので，$kA \in V$ となる．よって，V は $\mathrm{Mat}(n,n)$ の部分空間になる．

次に，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ として，基底を求める．このとき，$n=3$ である．$A = (a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}(3,3)$ に対し，$AB = O$ を解くことにより，$A \in V \iff a_{1,1} = a_{2,2}$ を得る．そこで，$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおき，さらに $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 3$ で $i \ne j$ である i, j に対して，(i,j) 成分が 1 で他がすべて 0 である n 次正方行列を $E_{i,j}$ とおけば，これらはすべて V の要素になる．$\{\, E_1, E_3, E_{i,j} \mid 1 \le i,j \le 3,\ i \ne j\}$ が V の基底になることを示す．$r_1E_1 + r_3E_3 + \sum_{1\le i,j\le 3,\ i\ne j} r_{i,j}E_{i,j} = 0_{3,3}$ とする．ただし，右辺の $O_{3,3}$ は，すべての成分が 0 であるような 3 次正方行列である．このとき，両辺の各成分を比較することにより，$r_1 = r_3 = r_{i,j} = 0$ が成り立つことが示される．よって，$\{\, E_1, E_3, E_{i,j} \mid 1 \le i,j \le 3,\ i \ne j\}$ は 1 次独立になることがわかる．また，任意の $A = (a_{i,j}) \in V$ に対して，$a_{1,1} = a_{2,2}$ であることに注意すると，$A = a_{1,1}E_1 + a_{3,3}E_3 + \sum_{1\le i,j\le 3,\ i\ne j} a_{i,j}E_{i,j}$ となることがわかるから，$\{\, E_1, E_3, E_{i,j} \mid 1 \le i,j \le 3,\ i \ne j\}$ は生成系であることもわかる．以上から，$\{\, E_1, E_3, E_{i,j} \mid 1 \le i,j \le 3,\ i \ne j\}$ は V の基底になることが示された．また，これより V の次元は 8 になる．

問 6.15　$V = \{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \}$ とおく．すべての項が 0 である数列は V に含まれるので，特に V は空でない．任意の $(a_n), (b_n) \in V$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$ だから，$(a_n) + (b_n) \in V$ となる．また，任意の $k \in \mathbb{K}$, $(a_n) \in V$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} |ka_n| = |k| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ なので，$k(a_n) \in V$ となる．よって，V は A の部分空間になる．

次に，任意の正の整数 n に対して n 個の 1 次独立なベクトルが存在することを示す．任意の正の整数 n に対して，第 n 項が 1 で他の項がすべて 0 である数列を $\boldsymbol{a}_n$ とすると，明らかに $\boldsymbol{a}_n \in V$ となる．このとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立であることがわかる．実際，$\sum_{1 \leq i \leq n} r_i \boldsymbol{a}_i = (0)$ とすれば，$1 \leq i \leq n$ のとき左辺の第 i 項は r_i なので，$r_i = 0$ がすべての i に対して成り立つことがわかる．よって，任意の正の整数 n に対して，n 個の 1 次独立なベクトルが存在することがわかった．

問 6.16　定値関数は微分可能なので，特に $D(a, b)$ は空でない．任意の $f, g \in D(a, b)$ および任意の実数 k に対し，$f + g$ と kf は $[a, b]$ で定義された微分可能な関数になる．よって，$D(a, b)$ は $C(a, b)$ の部分空間になる．

問 6.17　n 回微分可能で n 次導関数が 0 であるような関数全体の集合を V とおく．V は明らかに $D(\mathbb{R})$ の部分集合である．定値関数は n 回微分可能で n 次導関数が 0 になるので，特に V は空でない．f, g が n 回微分可能で $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ であれば，$f + g$ も n 回微分可能で $(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ である．さらに，任意の実数 k に対して kf も n 回微分可能で $(kf)^{(n)}(x) = (kf^{(n)})(x) = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ となる．よって，V は $D(\mathbb{R})$ の部分空間になる．

問 6.18　すべての成分が 0 である 4 次の数ベクトル $\mathbf{0}$ は V_1 に属すの

で，特に V_1 は空でない．$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}' \in V_1$, $k \in \mathbb{K}$ とする．ここで，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$ とおけば，V_1 の定義から $a+3b+2c-2d = a'+3b'+2c'-2d' = 0$ が成り立つ．よって，$(a+a')+3(b+b')+2(c+c')-2(d+d') = (a+3b+2c-2d)+(a'+3b'+2c'-2d') = 0$, $ka+3kb+2kc-2kd = k(a+3b+2c-2d) = 0$ となり，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'$, $k\boldsymbol{u} \in V_1$ がわかり，V_1 は $\mathbb{K}^4$ の部分空間になることがわかる．同様にして，V_2 も $\mathbb{K}^4$ の部分空間になることが示せる．

次に，連立方程式 $\begin{cases} a + 3b + 2c - 2d = 0 \\ a + 2b \qquad\;\; - \;\; d = 0 \\ 3a + 5b - \;\; c - 2d = 0 \end{cases}$ を解くと，$a = -t$, $b = t$, $c = 0$, $d = t$ $(t \in \mathbb{K})$ が得られる．よって，$V_1 \cap V_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ となり，$V_1 \cap V_2$ の基底として，例えば $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．また，次元は 1 になることがわかる．

問 6.19　最初に，$\dim V_1 = 3$, $\dim V_2 = 2$ であることを示す．実際，

$\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ は V_1 の基底になり，実際 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ は V_2 の基底になることがわかるので，$\dim V_1 = 3$, $\dim V_2 = 2$ が得られる．ここで，定理 6.11 より，$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 4$ になる．さらに，定理 6.8 を用いれば，$\dim K^4 = 4$ より $V_1 + V_2 = \mathbb{K}^4$ となることがわかる．

問 6.20　連立方程式 $\begin{cases} a+2b+c+3d=0 \\ 2a-3b+c+\ \ d=0 \end{cases}$ を解くことにより，$a = -5s/7 - 11t/7$, $b = -1s/7 - 5t/7$, $c = s$, $d = t$ $(s,\ t \in \mathbb{K})$ が得られる．よって，問 6.18 と同様にして，$V_1 \cap V_2$　の基底として，例えば $\begin{pmatrix}11\\5\\0\\-7\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\1\\-7\\0\end{pmatrix}$ を得る．さらに，$\dim(V_1 \cap V_2) = 2$ がわかる．

また，$\dim V_1 = \dim V_2 = 3$ がわかるので，$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 4 = \dim \mathbb{K}^4$ より，$V_1 + V_2 = \mathbb{K}^4$ がわかり，標準ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ が $V_1 + V_2$ の基底になることがわかる．

問 6.21　例題 6.4 と同様にして，連立方程式 $\begin{cases} k_1 - \ \ k_2 = \qquad\ \ -\ \ k_4 \\ 2k_1 + \ \ k_2 = \quad k_3 - 9k_4 \\ \qquad\ 3k_2 = -5k_3 - \ \ k_4 \\ 4k_1 - 3k_2 = -2k_3 - 4k_4 \end{cases}$

を解くことにより，$V_1 \cap V_2$ の基底として，例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ を得る．また，$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ である．

さらに，$\dim V_1 = \dim V_2 = 2$ がわかるので，$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 3$ となる．また，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立であるので，これらが $V_1 + V_2$ の基底になることがわかる．

問 6.22　同様にして，$V_1 \cap V_2$ の基底として，例えば $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ を得る．また，$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ である．さらに，$\dim V_1 = \dim V_2 = 2$ がわかるので，$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 3$ となる．また，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4$ は 1 次独立であるので，これらが $V_1 + V_2$ の基底になることがわかる．

問 6.23　任意の $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ が 1 次独立になるとする．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ に対して，$1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．ここで，左辺の最初の項の $\boldsymbol{x}$ は W_1 のベクトルと考え，2 番目の項の $\boldsymbol{x}$ は W_2 のベクトルと考えれば，もし $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であれば W_1 と W_2 の $\boldsymbol{0}$ と異なるベクトルが 1 次独立でないことになり，仮定に反する．よって，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ を得る．

逆に，$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ とする．任意の $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ に対して，$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ を考える．これから $k_1\boldsymbol{v}_1 = -k_2\boldsymbol{v}_2$ を得る．左辺は W_1 のベクトル，右辺は W_2 のベクトルであるから，このベクトルは $W_1 \cap W_2$ に属し，仮定から $k_1\boldsymbol{v}_1 = -k_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ となる．$\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v}_2 \neq \boldsymbol{0}$ より，$k_1 = k_2 = 0$ となり，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立になる．

問 6.24 V が W_1 と W_2 の直和になっているとする．いま，$\boldsymbol{v}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ に対して，問 6.23 より，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ がともに $\mathbf{0}$ と異なれば，これらは 1 次独立になる．よって，$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ であるとすると，$\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$ または $\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ が成り立つ．さらに，$\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_2$ より，どちらか一方が $\mathbf{0}$ であれば，他方も $\mathbf{0}$ となる．よって，$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ を得る．

逆に，任意の $\boldsymbol{v}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ に対して，$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ ならば $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ となるとする．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ に対して，$\boldsymbol{x} \in W_1$, $-\boldsymbol{x} \in W_2$ であり，$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ となるので，仮定から $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を得る．よって，V は W_1 と W_2 の直和となる．

問 6.25 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して，$A^{-1}\boldsymbol{x}$ を考えると，仮定より $A^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ $(\boldsymbol{v}_i \in V_i)$ と表される．よって，$\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_1 + A\boldsymbol{v}_2$ となり，$A\boldsymbol{v}_i \in W_i$ であることより $\mathbb{K}^n = W_1 + W_2$ が示された．

次に，$\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ とすると，$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{v}_1 = A\boldsymbol{v}_2$ $(\boldsymbol{v}_i \in V_i)$ と表される．よって，$A^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 \in V_1 \cap V_2$ となる．いま，仮定より $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ だから，$A^{-1}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となり，$\boldsymbol{x} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ を得る．よって，$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ となる．以上から，$\mathbb{K}^n$ は W_1 と W_2 の直和になっている．

問 6.26 (1) 1 次写像でない．実際，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$ に対して $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ であるが，$f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = 2\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ である．

(2) 1 次写像になる．実際，X, $Y \in \mathrm{Mat}(n, n)$, $k \in \mathbb{K}$ に対して $f(X + Y) = (X + Y) + {}^t(X + Y) = X + {}^tX + Y + {}^tY = f(X) + f(Y)$, $f(kX) = kX + {}^t(kX) = k(X + {}^tX) = kf(X)$ となる．

(3) 1 次写像になる．実際，X, $Y \in \mathrm{Mat}(n, n)$, $k \in \mathbb{K}$ に対して $f(X + Y) = A(X + Y) + (X + Y)B = (AX + XB) + (AY + BY) = f(X) + f(Y)$, $f(kX) = A(kX) + (kX)B = k(AX + XB) = kf(X)$ となる．

(4) 1次写像にならない．実際，$f(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=a(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+\boldsymbol{w}_0$, $f(\boldsymbol{v}_1)+f(\boldsymbol{v}_2)=(a\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{w}_0)+(a\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{w}_0)=a(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+2\boldsymbol{w}_0$ となるので，$\boldsymbol{w}_0\neq\mathbf{0}$ ならば，$f(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=f(\boldsymbol{v}_1)+f(\boldsymbol{v}_2)$ を満たさない．

問 6.27 (1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in V$, $k\in\mathbb{K}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) &= \phi\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} \\
&= (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\
&= (x_1+x_2)+(y_1+y_2) \\
&= \phi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\phi\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \\
\phi\left(k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) &= \phi\begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{pmatrix} \\
&= kx_1+kx_2=k(x_1+x_2) \\
&= k\phi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(2) $p(x)$, $q(x)\in V$, $k\in\mathbb{K}$ に対して，

$$\phi(p(x)+q(x))=(p(x)+q(x))^{(n)}=p^{(n)}(x)+q^{(n)}(x)=\phi(p(x))+\phi(q(x)),$$

$$\phi(kp(x))=(kp(x))^{(n)}=kp^{(n)}(x)=k\phi(p(x)).$$

(3) $p(x),\ q(x) \in V$, $k \in \mathbb{K}$ に対して，

$$\begin{aligned}\phi(p(x)+q(x)) &= (p(x)+q(x)) + (p(x)+q(x))'' \\ &= (p(x)+p''(x)) + (q(x)+q''(x)) = \phi(p(x)) + \phi(q(x)),\end{aligned}$$

$$\phi(kp(x)) = (kp(x)) + (kp(x))'' = k(p(x)+p''(x)) = k\phi(p(x)).$$

(4) $A,\ B \in V$, $k \in \mathbb{K}$ に対して，

$$\phi(A+B) = P(A+B)P^{-1} = P(A)P^{-1} + P(B)P^{-1} = \phi(A) + \phi(B),$$

$$\phi(kA) = P(kA)P^{-1} = kP(A)P^{-1} = k\phi(A).$$

問 6.28　(1) $\phi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ より，$x_1 + x_2 = 0$ を得る．よって，$\mathrm{Ker}\,\phi = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ -k \\ s \end{pmatrix} \middle|\ k, s \in \mathbb{K} \right\}$.

(2) 多項式 $p(x)$ に対して，$\phi(p(x)) = p^{(n)}(x) = 0$ である必要十分条件は，$p(x)$ の次数が $n-1$ 以下であることだから，$\mathrm{Ker}\,\phi$ は $n-1$ 次以下の多項式全体となる．

(3) $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ とする．$\phi(p(x)) = 0$ より $(a_0 - 2a_2) + (a_1 - 6a_3)x + (a_2 - 12a_4)x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$ を得る．これを解くと $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ となり，$\mathrm{Ker}\,\phi = \{0\}$ となる．

(4) $\phi(A) = O_n$ とする．ただし，O_n はすべての成分が 0 である n 次正方行列である．$PAP^{-1} = O_n$ の両辺に，左から P^{-1}，右から P をそれぞれかけると，$A = P^{-1}O_nP = O_n$ となり，これより $\mathrm{Ker}\,\phi = \{O_n\}$ を得る．

問 6.29　1 次写像 $f\colon V \to W$ が単射であるとする．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{0})$ なので，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成り立ち，$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\}$ がわかる．

逆に，$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\}$ とする．いま，$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ とすると，$f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ となり，$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\}$ より $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$，すなわち，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ を得る．よって，f は単射になる．

問 6.30　$k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$ とすると，$f(k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$ となる．よって，$k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n \in \operatorname{Ker} f$ を得る．ゆえに，仮定より $k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ を得る．いま，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立なので，$k_1 = \cdots = k_n = 0$ となり，$f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ も 1 次独立になることが示された．

問 6.31　まず最初に，f が全射になることを示す．任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の基底になっていることから，ある $k_i \in \mathbb{K}$ により，$\boldsymbol{x} = k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{v}_n)$ と表される．よって，$f(k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n) = k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{x}$ となり，f が全射であることがわかる．

次に，f が単射であることを示す．$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ とする．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底だから，$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n$ と表さる．よって，$\boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{x}) = f(k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n) = k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{v}_n)$ となる．ここで，$f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の基底になっていることから，$k_i = 0$ がわかり，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる．よって，問 6.29 より f が単射になることが示された．

問 6.32 (1) 例題 6.8 より，表現行列は,

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2)^{-1} A\,(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3)\\
&\quad = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&\quad = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&\quad = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(2) 例題 6.8 より，表現行列は,

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{w}_3)^{-1} A\,(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3)\\
&\quad = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&\quad = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&\quad = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 13 \\ 4 & 4 & 6 \\ -4 & -6 & -9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(3) $f(p(x)) = e^x(e^{-x}p(x))' = e^x(-e^{-x}p(x) + e^{-x}p'(x)) = -p(x) + p'(x)$ より，$f(1) = -1$, $f(x) = 1 + (-1)x$, $f(x^2) = 2x + (-1)x^2$, $f(x^3) =$

$3x^2+(-1)x^3$ なので，表現行列は，

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_3$, $f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_4$, $f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_3$, $f(\boldsymbol{v}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_4$ なので，表現行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

問 7.1

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) &= {}^t(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)A\boldsymbol{y} = ({}^t\boldsymbol{x}_1 + {}^t\boldsymbol{x}_2)A\boldsymbol{y} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}_1 A\boldsymbol{y} + {}^t\boldsymbol{x}_2 A\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}). \\
(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= {}^t(a\boldsymbol{x})A\boldsymbol{y} = a{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \\
(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) &= {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x} = {}^t({}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}{}^tA\boldsymbol{y} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (\text{ここで}, {}^tA = A\ \text{を用いた}).
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \geq 0. \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 &\iff x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0,\ x_2 = 0 \\ &\iff x_1 = x_2 = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

したがって，(,) は $\mathbb{R}^2$ の内積となる．

問 7.2

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2, B) &= \mathrm{tr}(B^t(A_1 + A_2)) = \mathrm{tr}(B^tA_1 + B^tA_2) \\ &= \mathrm{tr}(B^tA_1) + \mathrm{tr}(B^tA_2) = (A_1, B) + (A_2, B). \\ (aA, B) &= \mathrm{tr}(B^t(aA)) = \mathrm{tr}(aB^tA) = a\mathrm{tr}(B^tA) = a(A, B). \\ (B, A) &= \mathrm{tr}(A^tB) = \mathrm{tr}^t(A^tB) = \mathrm{tr}(B^tA) = (A, B).\end{aligned}$$

$A = (a_{ij})$ とする．

$$(A, A) = \mathrm{tr}(A^tA) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right) \geq 0.$$

$(A, A) = 0 \iff$ すべての $i,\, k$ に対して $a_{ik} = 0 \iff A = O.$

問 7.3

$$
\begin{aligned}
& (\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\} + \{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2\}, \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\}) = (\{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}'_2\}, \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\}) \\
= \quad & (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2) + (\boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{y}_2) \\
= \quad & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2) + (\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}'_2, \boldsymbol{y}_2) \\
= \quad & (\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}, \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\}) + (\{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2\}, \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\}). \\
& (a\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}, \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\}) = (\{a\boldsymbol{x}_1, a\boldsymbol{x}_2\}, \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\}) = (a\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) + (a\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2) \\
= \quad & a(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) + a(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2) = a\{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2)\} = a(\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}, \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\}). \\
& (\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\}, \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}) = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_1) + (\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_2) = \overline{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1)} + \overline{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2)} \\
= \quad & \overline{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2)} = \overline{(\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}, \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\})}. \\
& (\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}, \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) \geq 0. \\
& (\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}, \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}) = 0 \iff (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) = 0 \\
\iff \quad & \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0} \iff \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\} = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\}.
\end{aligned}
$$

問 7.4 (1) $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = x_1^2 - x_2^2$ となり，必ずしも ≥ 0 とは限らない．

(2) $(A_1 + A_2, B) = \mathrm{tr}(A_1 + A_2 + B)$, $(A_1, B) + (A_2, B) = \mathrm{tr}(A_1 + B) + \mathrm{tr}(A_2 + B) = \mathrm{tr}(A_1 + A_2 + 2B)$ である．一般に，$\mathrm{tr}(A_1 + A_2 + B) \neq \mathrm{tr}(A_1 + A_2 + 2B)$ であるから，

$$(A_1 + A_2, B) \neq (A_1, B) + (A_2, B).$$

(3) $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1/2) \\ 2x - 1 & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases}$ とおくと，$f \in \mathcal{C}([0,1])$ で，$f \neq 0$. ところが，

$$(f, f) = \int_0^{1/2} f(t)f(t)\, dt = 0.$$

問 7.5

(1)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= (1+i)(-2i)+i(1+i)=1-i.\\ ||\boldsymbol{x}|| &= \sqrt{|1+|i|^2+|i|^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}.\\ ||\boldsymbol{y}|| &= \sqrt{|2i|^2+|1-i|^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(x,e^x) &= \int_0^1 te^t\,dt=\left[te^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt=e-(e-1)=1.\\ ||x||^2 &= \int_0^1 t\cdot t\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}.\\ ||e^x||^2 &= \int_0^1 e^t\cdot e^t\,dt=\int_0^1 e^{2t}\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1).\end{aligned}$$

$$\therefore \quad ||x||=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad ||e^x||=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e^2-1}.$$

(3)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= (1\ 2)\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}=(1\ 2)\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}=-15.\\ ||\boldsymbol{x}||^2 &= (1\ 2)\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=(1\ 2)\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=10.\\ ||\boldsymbol{y}||^2 &= (-3\ \ -1)\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}=(-3\ \ -1)\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}=25.\end{aligned}$$

$$\therefore \quad ||\boldsymbol{x}||=\sqrt{10},\quad ||\boldsymbol{y}||=5.$$

(4)

$$\begin{aligned}
(A,B) &= \mathrm{tr}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix} = (-1)+(-2) = -3.\\
||A||^2 &= \mathrm{tr}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix} = 6.\\
||B||^2 &= \mathrm{tr}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}10 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix} = 15.
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad ||A|| = \sqrt{6}, \quad ||B|| = \sqrt{15}.$$

問 7.6

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})_1 + (\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})_2\\
&= (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})_1 + (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})_1 + (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})_2 + (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})_2\\
&= (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})_1 + (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})_2 + (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})_1 + (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})_2 = (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}).\\
(a\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= (a\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_1 + (a\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_2 = a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_1 + a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_2\\
&= \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1 + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2\} = a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).\\
(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) &= (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})_1 + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})_2 = \overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_1} + \overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_2}\\
&= \overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_1 + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_2} = \overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}.\\
(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})_1 + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0 \Longleftrightarrow (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})_1 = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})_2 = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

したがって，$(\cdot,\cdot)$ は V の内積である．

問 7.7

$$\begin{aligned}
&||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
= \ &\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\} + \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\}\\
= \ &2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = 2||\boldsymbol{x}||^2 + 2||\boldsymbol{y}||^2.
\end{aligned}$$

問 7.8

$$
\begin{aligned}
||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 &= ||\boldsymbol{x}||^2+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+||\boldsymbol{y}||^2\\
||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 &= ||\boldsymbol{x}||^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+||\boldsymbol{y}||^2\\
||\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}||^2 &= ||\boldsymbol{x}||^2-i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+||\boldsymbol{y}||^2\\
||\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}||^2 &= ||\boldsymbol{x}||^2+i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+||\boldsymbol{y}||^2
\end{aligned}
$$

であるから.

$$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2+i||\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}||^2-i||\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}||^2=4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

問 7.9 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=||\boldsymbol{x}||^2-||\boldsymbol{y}||^2$ であるから,

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\perp(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Longleftrightarrow||\boldsymbol{x}||^2-||\boldsymbol{y}||^2=0\Longleftrightarrow||\boldsymbol{x}||=||\boldsymbol{y}||.$$

（注意）$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ は，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ で作られる平行四辺形の対角線であるから，対角線が直交する $\Longleftrightarrow$ 菱形である，というのが上の問題である.

問 7.10 (1) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||\geq 0$. $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$. したがって，$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.

(2) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||=||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}||=d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$.

(3) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})=||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}||+||\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}||\geq||(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})||=||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. （三角不等式を用いた.）

問 7.11 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=b+2a-2=0$, $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)=a+b=0$, $(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=2-c-2b=0$ より，$a=2$, $b=-2$, $c=6$ を得る.

問 7.12

(1)

$$||\boldsymbol{a}_1||=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.\quad\therefore\ \boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1) = 1/\sqrt{2}$ であるから,

$$\boldsymbol{a}_2' = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$||\boldsymbol{a}_2'|| = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+1+4} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$\therefore\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2'}{||\boldsymbol{a}_2||} = \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1)\frac{1}{\sqrt{2}}(1+1) = \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1-2+1+2) = 0$$

であるから,

$$\boldsymbol{a}_3' = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$||\boldsymbol{a}_3'|| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}. \quad \therefore\ \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_3'}{||\boldsymbol{a}_3'||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\{\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_3\}$ が求めるものである.

(2)

$$||\boldsymbol{a}_1|| = \sqrt{1+|i|^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}. \quad \therefore\ \boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix}.$$

$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1) = i/\sqrt{2}$ であるから，

$$\boldsymbol{a}_2' = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}i\\1+i\\0\end{pmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}i\\2+2i\\1\end{pmatrix}.$$

$$||\boldsymbol{a}_2'|| = \frac{1}{2}\sqrt{|i|^2+|2+2i|^2+1^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}. \quad \therefore\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2'}{||\boldsymbol{a}_2'||} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\2+2i\\1\end{pmatrix}.$$

$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が求めるものである．

(3) $\boldsymbol{a}_1 = 1$, $\boldsymbol{a}_2 = x$, $\boldsymbol{a}_3 = x^3$ とする．

$$||\boldsymbol{a}_1|| = \sqrt{\int_0^1 1\cdot 1\,dt} = 1. \quad \therefore\ \boldsymbol{e}_1 = 1$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1) &= \int_0^1 t\cdot 1\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.\\
\boldsymbol{a}_2' &= \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = x - \frac{1}{2}.\\
||\boldsymbol{a}_2'|| &= \int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 dt = \left[\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{12}. \quad ||\boldsymbol{a}_2'|| = \frac{1}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2'}{||\boldsymbol{a}_2'||} = 2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2x-1).$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1) &= \int_0^1 t^2 \cdot 1 \, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}, \\
(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2) &= \int_0^1 t^2 \cdot \sqrt{3}(2t-1) \, dt = \sqrt{3}\left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}. \\
\boldsymbol{a}_3' &= \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 \\
&= x^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(2x-1) = \frac{1}{6}(6x^2 - 6x + 1). \\
||\boldsymbol{a}_3'||^2 &= \int_0^1 \frac{1}{36}(6t^2 - 6t + 1)^2 \, dt = \frac{1}{180}. \quad ||\boldsymbol{a}_3'|| = \frac{1}{6\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_3'}{||\boldsymbol{a}_3'||} = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$$

$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ が求めるものである．

問 7.13 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in V$, $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0} (i = 1, \cdots, m)$ を直交系とする．$\sum_{i=1}^m a_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ $(a_i \in K)$ とする．各 k $(1 \leq k \leq m)$ に対して，

$$0 = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_k) = \left(\sum_{i=1}^m a_i \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_k\right) = \sum_{i=1}^m a_i (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_k) = a_k (\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_k).$$

$$(\because \quad (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_k) = 0 \ (i \neq k).) \quad \therefore \ a_k ||\boldsymbol{x}_k||^2 = 0.$$

$||\boldsymbol{x}_k|| \neq 0$ $(\because \quad \boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{0})$ であるから $a_k = 0$. したがって，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ は 1 次独立である．

問 7.14 $(e^{inx}, e^{imx}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int} \cdot \overline{e^{imt}} \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} \, dt$ であるから，$n \neq m$ のとき，

$$(e^{inx}, e^{imx}) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)t}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

$n=m$ のとき，

$$(e^{inx}, e^{imx}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\cdot dt = 1.$$

よって，S は正規直交系である．

問 7.15 (1) $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{a}_i$ とする．このとき，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_k) = \left(\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k\right) = \sum_{i=1}^n a_i(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = a_k(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k) = a_k.$$

よって，$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i$.

(2) $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^n b_j\boldsymbol{a}_j$ とすると，$a_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i)$, $b_j = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_j)$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ である．また，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^n b_j\boldsymbol{a}_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i\overline{b_j}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^n a_i\overline{b_i}.$$

ところで，$\overline{b_i} = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_i)} = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{y})$ であるから，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i)(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{y})$.

(3) (2) より，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i)(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i)\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i} = \sum_{i=1}^n |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i)|^2.$$

問 7.16 前問 1 により，

$$f(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^n (f(\boldsymbol{a}_j), \boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i \quad (j = 1, \cdots, n)$$

となるから，

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} (f(\boldsymbol{a}_1), \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (f(\boldsymbol{a}_n), \boldsymbol{a}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (f(\boldsymbol{a}_1), \boldsymbol{a}_n) & \cdots & (f(\boldsymbol{a}_n), \boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix}.$$

問 7.17　$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が 1 次従属ならば，ある $\boldsymbol{a}_j$ は他の 1 次結合で表わせる．$\boldsymbol{a}_j = \sum_{i \neq j} a_i \boldsymbol{a}_i$ とすると，

$$(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k) = \left(\sum_{i \neq j} a_i \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k \right) = \sum_{i \neq j} a_i (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) \quad (k = 1, \ldots, m)$$

となるから，G の第 j 行は，その他の行の 1 次結合で表される．よって，$G = 0$.

逆に，$G = 0$ とする．G の m 個の行は 1 次従属となるから，少なくとも 1 つが $\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ に対して，$\sum_{i=1}^m a_i (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0$ $(j = 1, \cdots, m)$. これより，

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \boldsymbol{a}_i, \sum_{i=1}^m a_i \boldsymbol{a}_i \right) = \sum_{i\ j=1}^m a_i \overline{a_j} (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \sum_{j=1}^m \overline{a_j} \left(\sum_{i=1}^m a_i (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) \right) = 0.$$

すなわち，$(\sum_{i=1}^m a_i \boldsymbol{a}_i, \sum_{i=1}^m a_i \boldsymbol{a}_i) = 0$ を得る．よって，内積の性質より，$\sum_{i=1}^m a_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}$. ゆえに，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は 1 次従属である．

問 7.18　$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を V の正規直交基底とする．$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(\boldsymbol{e}_i)} \cdot \boldsymbol{e}_i$ とおく．

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(\boldsymbol{e}_i)} \cdot \boldsymbol{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \varphi(\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \varphi(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i \boldsymbol{e}_i) = \varphi(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

また，$\varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ とすると，内積の定義 4 により，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

問 7.19　$\mathbf{0} \in S^{\perp}$ であるから，$S^{\perp} \neq \phi$.

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S^{\perp}, a_1, a_2 \in K$ とする．任意の $\boldsymbol{y} \in S$ に対して，$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = 0$ であるから，

$$(a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = a_1 (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + a_2 (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 0$$

となり，$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 \in S^\perp$. ゆえ，$S^\perp$ は部分空間である．

問 7.20 (1) $\dim W = m$, $\dim V = n$ とする．$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ を W の正規直交基底とし，これを V の正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ に延長する．すると，V の任意の元 $\boldsymbol{x}$ は,

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{e}_m + a_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n \ (a_i \in K,\ i = 1, \ldots, n)$$

と書ける．W の任意の元 $c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{e}_m$ に対して,

$$(a_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n,\ c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{e}_m) = 0$$

となるから，$a_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n \in W^\perp$. したがって，$V = W + W^\perp$. また，$W \cap W^\perp \ni \boldsymbol{x}$ とすると，$\boldsymbol{x} \in W$ かつ $\boldsymbol{x} \in W^\perp$ より，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$.

$$\therefore\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \quad \therefore\ W \cap W^\perp = \{\boldsymbol{0}\}.$$

ゆえに，$V = W \oplus W^\perp$.

(2) $\boldsymbol{x} \in W$ とすると，$W^\perp$ の任意の元 $\boldsymbol{y}$ に対して,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0. \quad \therefore\ \boldsymbol{x} \in (W^\perp)^\perp. \quad \therefore\ W \subset (W^\perp)^\perp.$$

$\boldsymbol{x} \in (W^\perp)^\perp$ とすると，$\boldsymbol{x} \in V$ であるから，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 \in W, \boldsymbol{x}_2 \in W^\perp$ と書ける．($\because$ (1)). $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2) = 0$, $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ であるから,

$$0 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) = ||\boldsymbol{x}_2||^2.$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}. \quad \therefore\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \in W. \quad \therefore\ (W^\perp)^\perp \subset W.$$

ゆえに，$(W^\perp)^\perp = W$.

(3)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} \in W_2^\perp \ &\Longrightarrow\ W_2 \text{ の任意の元 } \boldsymbol{y} \text{ に対して，} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\\ &\Longrightarrow\ W_1 \subset W_2 \text{ より，} W_1 \text{ の任意の元 } \boldsymbol{y} \text{ に対して，} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\\ &\Longrightarrow\ \boldsymbol{x} \in W_1^\perp. \quad \therefore\ W_2^\perp \subset W_1^\perp.\end{aligned}$$

(4) $W_1, W_2 \subset W_1 + W_2$ より，$(W_1 + W_2)^\perp \subset W_1^\perp, W_2^\perp$.

$$\therefore\ (W_1 + W_2)^\perp \subset W_1^\perp \cap W_2^\perp.$$

$\boldsymbol{x} \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$ とする．$\boldsymbol{x} \in W_1^\perp$ かつ，$\boldsymbol{x} \in W_2^\perp$. $W_1 + W_2$ の任意の元 $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_1 \in W_1, \boldsymbol{y}_2 \in W_2$ に対して，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) = 0 + 0 = 0.$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x} \in (W_1 + W_2)^\perp. \quad \therefore\ W_1^\perp \cap W_2^\perp \subset (W_1 + W_2)^\perp.$$

ゆえに，$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

(5) (4), (2) より，

$$(W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp = (W_1^\perp)^\perp \cap (W_2^\perp)^\perp = W_1 \cap W_2.$$

さらに，(2) より，

$$W_1^\perp + W_2^\perp = ((W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp)^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp.$$

$$\therefore\ (W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp.$$

問 7.21 (1) $S^\perp \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$1x - 1y + 3z = 0$. この方程式の解を求めると，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \therefore\ S^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(2) $S^\perp \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x + 0y - iz = 0 \\ -2ix + (1-i)y + 1z = 0 \end{array} \right. .$$

この連立方程式の基本解として，$\begin{pmatrix} 2i \\ -3(1+i) \\ 2 \end{pmatrix}$ を得る．したがって，

$$S^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 2i \\ -3(1+i) \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(3) $S^{\perp} \ni a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ とすると，

$$\begin{aligned} 0 &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2, x^2) = \int_0^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) t^2 \, dt \\ &= \frac{1}{3} a_0 + \frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{5} a_2 . \end{aligned}$$

$$\therefore \ 20 a_0 + 15 a_1 + 12 a_2 = 0.$$

この方程式の基本解を求めると，

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が得られるから，$S^{\perp}$ の基底として，$\{-3+4x, -3+5x^2\}$ がとれる．したがって，

$$S^{\perp} = \langle -3+4x, -3+5x^2 \rangle .$$

問 7.22 $r < n$ であるから，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は $\mathbf{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}_1$ をもつ．

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{x}_1||} \boldsymbol{x}_1 \text{ とすると，} \quad A\boldsymbol{u}_1 = \mathbf{0}, \ ||\boldsymbol{u}_1|| = 1.$$

$n-r=1$ ならば，$\boldsymbol{u}_1$ が求めるもの．$r<n-1$ ならば，$\begin{pmatrix} A \\ {}^t\overline{\boldsymbol{u}}_1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を考える．$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ {}^t\overline{\boldsymbol{u}}_1 \end{pmatrix} \leq r+1<n$ であるから，$\begin{pmatrix} A \\ {}^t\overline{\boldsymbol{u}}_1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\boldsymbol{0}$ 以外の解 $\boldsymbol{x}_2$ をもつ．

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{||\boldsymbol{x}_2||}\boldsymbol{x}_2 \text{ とすると}, A\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{0},\ ||\boldsymbol{u}_2||=1.\ (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)=0.$$

$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ は1次独立である．$n-r=2$ ならば，$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ が求めるものである．$r<n-2$ ならば，$\begin{pmatrix} A \\ {}^t\overline{\boldsymbol{u}}_1 \\ {}^t\overline{\boldsymbol{u}}_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を考える．$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ {}^t\overline{\boldsymbol{u}}_1 \\ {}^t\overline{\boldsymbol{u}}_2 \end{pmatrix} \leq r+2<n$ であるから，これは $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}_3$ をもつ．

$$\boldsymbol{u}_3=\frac{1}{||\boldsymbol{x}_3||}\boldsymbol{x}_3 \text{ とすると}, A\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{0},\ ||\boldsymbol{u}_3||=1.\ (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_3)=(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)=0.$$

$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$ は1次独立である．$n-r=3$ ならば，$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$ は求めるものである． これを続けて，正規直交系 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{u-r}$ を得る．これらは1次独立となり，$\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{n-r}\}$ が求めるものである．

（注意）特に，$K=\mathbb{R}$ のときは，${}^t\overline{\boldsymbol{a}}$ を ${}^t\boldsymbol{a}$ でおきかえる．

問 7.23

$$A_1^*=\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}=A_1. \quad A_2^*=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\neq A_2,-A_2.$$

$$A_2^*A_2=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{2\sqrt{2}} & -\frac{i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad A_2A_2^*=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{i}{2\sqrt{2}} & -\frac{i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} & \frac{i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2\sqrt{2}} & -\frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

であるから，$A_2^* A_2 \neq A_2 A_2^*$.

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} = -A_3. \quad A_4^* = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \neq A_4, -A_4.$$

$$A_4^* A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_4 A_4^*.$$

したがって，A_1 はエルミット行列，A_3 は交代エルミット行列，A_4 はユニタリ行列である．例題 7.9 により，A_1, A_3, A_4 は正規行列である．また，A_2 は正規行列でない．

問 7.24 $\mathbb{C}^3$ の正規直交基底として $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{E}$ をとると，

$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2i & 3 & 1-i \\ 0 & 2i & 3 \\ 1+i & 0 & -i \end{pmatrix}$. ゆえに，$[f^*]_{\mathcal{E}} = [f]_{\mathcal{E}}^* = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 1-i \\ 3 & -2i & 0 \\ 1+i & 3 & i \end{pmatrix}$.

よって，

$$f^* \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2ix + (1-i)z \\ 3x - 2iy \\ (1+i)x + 3y + iz \end{pmatrix}.$$

問 7.25 (1) $\Rightarrow$ (2): $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, f^* \circ f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, 1_V(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(2) $\Rightarrow$ (3): $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ とすればよい.

(3) $\Rightarrow$ (2): $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 + 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $||f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})||^2 = ||f(\boldsymbol{x})||^2 + ||f(\boldsymbol{y})||^2 + 2\mathrm{Re}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$ であるから，$\mathrm{Re}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = \mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. また, $\boldsymbol{y}$ を $i\boldsymbol{y}$ で置き換えることによって，$\mathrm{Im}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を得る．したがって，$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. (Re, Im は複素数の実数部, 虚数部を表す．)

(2) $\Rightarrow$ (4): $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$. $(f(\boldsymbol{e}_i), f(\boldsymbol{e}_j)) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$.

(4) $\Rightarrow$ (5): $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を V の正規直交基底とする．そこで，

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i \quad (j = 1, \ldots, n)$$

とすると，$[f]_{\mathcal{E}} = (a_{ij})$. 一方，$(f(\boldsymbol{e}_j), f(\boldsymbol{e}_i)) = \delta_{ij}$ より，

$$\delta_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{e}_k, \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell i}\boldsymbol{e}_\ell\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{kj}\overline{a_{\ell i}}(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_\ell) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\overline{a_{ki}}.$$

$\overline{a_{ki}}$ は $[f]_{\mathcal{E}}^*$ の (i,k) 成分であるから，$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\overline{a_{ki}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}}a_{kj}$ は $[f]_{\mathcal{E}}^* \cdot [f]_{\mathcal{E}}$ の (i,j) 成分である．したがって，$[f]_{\mathcal{E}}^*[f]_{\mathcal{E}} = E$. これより $[f]_{\mathcal{E}}$ は正則で，$[f]_{\mathcal{E}}^{-1} = [f]_{\mathcal{E}}^*$ となるから

$$[f]_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}}^* = [f]_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}}^{-1} = E.$$

よって，$[f]_{\mathcal{E}}$ はユニタリ行列である．

(5) $\Rightarrow$ (1): $E = [f]_{\mathcal{E}}^*[f]_{\mathcal{E}} = [f^*]_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}} = [f^* \circ f]_{\mathcal{E}}$. したがって，$f^* \circ f = 1_V$. 同様に，$f \circ f^* = 1_V$. よって，$f$ はユニタリ変換である．

（注意） $K = \mathbb{R}$ のとき，ユニタリ変換を直交変換，ユニタリ行列を直交行列と置き換えれば，問題 7.25 が成り立つ．

問 7.26 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を K^n の標準基底とする．このとき，$K^n \to K^n; \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ の表現行列は A である．$A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1, \ldots, A\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{a}_n$ であるから，問題 7.25 の (4) $\Longleftrightarrow$ (5) から上の同値がでる．

問 7.27 (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，${}^tAA = E$ より，${}^tA = A^{-1}$. よって，

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

一方，${}^tAA = E$ より，$\det A = \pm 1$ となる．

- $\det A = 1$ のとき，$d = a$, $c = -b$, $a^2 + b^2 = 1$. ゆえに，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

- $\det A = -1$ のとき，$d = -a$, $c = b$, $a^2 + b^2 = 1$. ゆえに，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

適当な θ を用いて $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ と書ける．したがって，前者の場合は $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, 後者の場合は $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ と表わせる．

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，$A^*A = E$ より，$A^* = A^{-1}$ であるから，

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

一方，$A^*A = E$ より，$\det A^* \cdot \det A = 1$. ゆえに，$|\det A| = 1$. これより，$\det A = e^{i\theta}$ (θ は実数) と書ける．したがって，

$$d = e^{i\theta}\overline{a}, \quad c = -e^{i\theta}\overline{b}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

よって，2 次のユニタリ行列は，$\begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\theta}\overline{b} & -e^{i\theta}\overline{a} \end{pmatrix}$ ($|a|^2 + |b|^2 = 1$) と表わせる．

問 7.28

$$\begin{aligned}
\text{(1) } A\text{: エルミット行列} &\iff A^* = A \iff (B+iC)^* = B+iC \\
&\iff {}^tB - i{}^tC = B + iC \\
&\iff {}^tB = B, {}^tC = -C. \\
\text{(2) } A\text{: ユニタリ行列} &\iff A^*A = E \iff (B+iC)^*(B+iC) = E \\
&\iff ({}^tB - i{}^tC)(B+iC) = E \\
&\iff ({}^tBB + {}^tCC) + i({}^tBC - {}^tCB) = E \\
&\iff {}^tBB + {}^tCC = E, {}^tBC - {}^tCB = O.
\end{aligned}$$

問 7.29 $H^* = {}^tA - i{}^tB$ である．$H^* = H$ より，$|H^*H| = |H^2| = |H|^2$．一方，

$$\begin{aligned}
H^*H &= ({}^tA - i{}^tB)(A+iB) \\
&= \{(E - i{}^tB{}^tA^{-1}){}^tA\}\{A(E+iA^{-1}B)\} \\
&= \{{}^t(E - iA^{-1}B){}^tA\}\{A(E+iA^{-1}B)\}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
|H|^2 &= |H^*H| = |{}^t(E-iA^{-1}B)| \cdot |{}^tA| \cdot |A| \cdot |E + iA^{-1}B| \\
&= |A|^2 \cdot |E - iA^{-1}B| \cdot |E + iA^{-1}B| \\
&= |A|^2 \cdot |(E - iA^{-1}B)(E + iA^{-1}B)| \\
&= |A|^2 \cdot |E + (A^{-1}B)^2|.
\end{aligned}$$

問 7.30 問題 7.28 より，C : ユニタリ行列 $\iff {}^tAA + {}^tBB = E, {}^tAB - {}^tBA = O$.

$$\begin{aligned}
{}^t\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ -{}^tB & {}^tA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}^tAA + {}^tBB & -{}^tAB + {}^tBA \\ -{}^tBA + {}^tAB & {}^tBB + {}^tAA \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であるから,

$$
{}^t\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix} \iff {}^tAA + {}^tBB = E, {}^tAB + {}^tBA = O
$$
$$
\iff C: \text{ユニタリ行列}.
$$

問 7.31 $\widetilde{A}A = |A| \cdot E$. 両辺に ${}^tA$ を掛ける,$\widetilde{A}(A^tA) = |A| \cdot {}^tA$. A が直交行列であることから,$A^tA = E, |A| = \pm 1$. ゆえに,$\widetilde{A} = \pm^t A$.

問 7.32 (1) ${}^t(AB)(AB) = {}^tB({}^tAA)B = ({}^tBE)B = {}^tBB = E, (AB)^t(AB) = A(B^tB)^tA = (AE)^tA = A^tA = E$.

(2)

$$
\begin{aligned}
|A+B| &= |AE + EB| = |A({}^tBB) + (A^tA)B| \\
&= |A({}^tB +^t A)B| = |A| \cdot |{}^tB + {}^tA| \cdot |B| \\
&= |A| \cdot |B| \cdot |{}^t(A+B)| \\
&= |A| \cdot |B| \cdot |A+B| = -|A|^2 \cdot |A+B| = -|A+B|.
\end{aligned}
$$

よって,$|A+B| = 0$. ゆえに,$A+B$ は正則ではない.

問 7.33 $(E-A)(E+A) = E - A^2 = (E+A)(E-A)$. ゆえに,$(E+A)^{-1}(E-A) = (E-A)(E+A)^{-1}$.

(1) $B^* = \{(E-A)(E+A)^{-1}\}^* = \{(E+A)^{-1}\}^*(E-A)^* = (E+A^*)^{-1}(E-A^*)$. ところで,$A^* = A^{-1}$ であるから,

$$
\begin{aligned}
(E+A^*)^{-1}(E-A^*) &= (E+A^{-1})^{-1}(E-A^{-1}) \\
&= \{A^{-1}(A+E)\}^{-1}A^{-1}(A-E) \\
&= (E+A)^{-1}AA^{-1}(A-E) \\
&= -(E+A)^{-1}(E-A) \\
&= -(E-A)(E+A)^{-1} \\
&= -B.
\end{aligned}
$$

よって，$B^* = -B$. ゆえに，B は交代エルミット行列である.
(2) $A^* = -A$ とする.

$$\begin{aligned} B^*B &= \{(E-A)(E+A)^{-1}\}^*\{(E-A)(E+A)^{-1}\} \\ &= \{(E+A^*)^{-1}(E-A^*)\}\{(E+A)^{-1}(E-A)\} \\ &= (E+A^*)^{-1}\{(E+A)(E+A)^{-1}\}(E-A) \\ &= (E+A^*){-1}(E+A^*) = E. \end{aligned}$$

同様に，$BB^* = E$. ゆえに，B はユニタリ行列である.

問 7.34 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が ${}^tAA = A^tA$ を満たすとする.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2+c^2 = a^2+b^2, \\ b^2+d^2 = c^2 = d^2, \\ ab+cd = ac+bd. \end{cases}$$
$$\iff c^2 = b^2,\ ab+cd = ac+bd.$$

- $c = b$ のとき，この条件は成立し，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.
- $c \neq b$ のとき，$c = -b$. ここで，$b = 0$ ならば $c = 0$ となり，$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. $b \neq 0$ のとき，$ab+cd = ac+bd$ より $2ab = 2bd$ であるから，$a = d$. したがって，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

問 7.35 (1) $A^* = A$ より，$A^2 = A^*A$. $A = (a_{ij})$ とすると，A^2 の (i,i) 成分は，

$$\overline{a}_{1i}a_{1i} + \cdots + \overline{a}_{ni}a_{ni} = |a_{1i}|^2 + \cdots + |a_{ni}|^2$$

であるから，$A^2 = O$ より，$|a_{1i}|^2 + \cdots + |a_{ni}|^2 = 0$. したがって，$a_{ki} = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. これが各 i $(i = 1, \ldots, n)$ についていえるから，$a_{ki} = 0$ $(i, k = 1, \ldots, n)$. ゆえに，$A = O$.

(2) $A^2\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ より，$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A^*A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) = 0$. よって，$||A\boldsymbol{x}||^2 = 0$，そして $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

問 7.36　$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ とする．すると，$(\boldsymbol{x}, (A_1^2 + \cdots + A_m^2)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, O\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) = 0$ である．一方，

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (\boldsymbol{x}, A_1^2\boldsymbol{x}) + \cdots + (\boldsymbol{x}, A_m^2\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A_1^*A_1\boldsymbol{x}) + \cdots + (\boldsymbol{x}, A_m^*A_m\boldsymbol{x}) \\ &= (A_1\boldsymbol{x}, A_1\boldsymbol{x}) + \cdots + (A_m\boldsymbol{x}, A_m\boldsymbol{x}) = ||A_1\boldsymbol{x}||^2 + \cdots + ||A_m\boldsymbol{x}||^2 \end{aligned}$$

である．ゆえに，$||A_1\boldsymbol{x}||^2 + \cdots + ||A_m\boldsymbol{x}||^2 = 0$. $||A_i\boldsymbol{x}||^2 \geq 0$ であるから，$||A_i\boldsymbol{x}|| = 0$. ゆえに，$A_i\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. これが任意の $\boldsymbol{x}$ に対して成り立つから，$A_i = O$ $(i = 1, \ldots, m)$.

問 7.37　p を $f^p(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ となる最小の整数とし，$p > 1$ とする．$\boldsymbol{y} = f^{p-1}(\boldsymbol{x})$ とおくと，$f(\boldsymbol{y}) = f^p(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. 例題 7.10 により，$||f^*(\boldsymbol{y})|| = ||f(\boldsymbol{y})||$ であるから，$||f^*(\boldsymbol{y})|| = 0$. ゆえに，$f^*(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$.

一方，

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = (f^{p-1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (f(f^{p-2}(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{y}) = (f^{p-2}(\boldsymbol{x}), f^*(\boldsymbol{y}))$$

であるから，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = 0$. ゆえに，$\boldsymbol{y} = f^{p-1}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. これは p のとり方に反する．したがって，$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.

問 7.38　行列の積を計算して ${}^tTT = E_2$ を得る．したがって，例題の条件を満たしているので直交射影である．また，同様に計算して $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ となり，列ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で

張られる部分空間 U への射影である．これらで張られるベクトル空間 U の基底は $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\5\\0\\-1\end{pmatrix}$ であることがわかり，U は 2 次元の部分空間である．

問 7.39　$\mathbb{R}^4$ の 3 つベクトル $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ は直交系である．これを正規化すると $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ となる．$T = (\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&-2\\2&2&-1\\-2&2&1\end{pmatrix}$ とおくと，${}^tTT = E_3$ となる．よって，$S = T{}^tT$ とおけばこれが U への直交射影であることが例

題 7.11 からわかる．これを計算して，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & & & \\ -1 & 1 & -2 & & & \\ 2 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1+1+4 & -1+1-4 & 2+2-2 & -2+2+2 \\ -1+1-4 & 1+1+4 & -2+2+2 & 2+2-2 \\ 2+2-2 & -2+2+2 & 4+4+1 & -4+4-1 \\ -2+2+2 & 2+2-2 & -4+4-1 & 4+4+1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & 2 \\ -4 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

問 7.40　$\mathbb{R}^3$ 内の平面 P の任意のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix}$ とスカラー $k \in \mathbb{R}$ に対して，

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+w \\ y+u \\ z+v \end{pmatrix},\ k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}.
$$

ところで，

$$
\begin{aligned}
3(x+w)+2(y+u)+z+v &= (3x+2y+z)+(3w+2u+v) = 0+0 = 0 \\
3(kx)+2(ky)+kz &= k(3x+2y+z) = 0
\end{aligned}
$$

となるので，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix} \in P$, $k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P$ がわかる．よって，P は部分ベクトル空間であることが示せた．

次に，P の直交基底として，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ が取れるので，行列 $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-5}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}$ に対して，例題 7.11 より，P への直交射影は

$$\begin{aligned} T^tT &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-5}{\sqrt{42}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{-5}{\sqrt{42}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{42} & \frac{-1}{3} - \frac{4}{42} & \frac{-1}{3} + \frac{5}{42} \\ \frac{-1}{3} - \frac{4}{42} & \frac{1}{3} + \frac{16}{42} & \frac{1}{3} - \frac{20}{42} \\ \frac{-1}{3} + \frac{5}{42} & \frac{1}{3} - \frac{20}{42} & \frac{1}{3} + \frac{25}{42} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{15}{42} & \frac{-18}{42} & \frac{-9}{42} \\ \frac{-18}{42} & \frac{30}{42} & \frac{-6}{42} \\ \frac{-9}{42} & \frac{-6}{42} & \frac{39}{42} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．

問 7.41　$\mathbb{R}^4$ の 3 つのベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ で張られる部分空間 U の正規直交基底をグラム-シュミットの直交化法により求める．先ず,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を正規化する．

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

次に，$\boldsymbol{u}_1$ と直交するベクトルが

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(1+4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と与えられ，これを正規化して

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を得る．さらに，これら $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ と直交するベクトルが

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_3 &= \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_1\right)\boldsymbol{u}_1 - \left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2\right)\boldsymbol{u}_2 \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{66}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\1\\6\\2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}-5\\1\\6\\2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{6}(1+1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{66}(-5+1+12)\begin{pmatrix}-5\\1\\6\\2\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{66}\left(\begin{pmatrix}66\\66\\132\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}22\\22\\0\\44\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-40\\8\\48\\16\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{66}\begin{pmatrix}84\\36\\84\\-60\end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{11}\begin{pmatrix}7\\3\\7\\-5\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と与えられ，これを正規化して

$$
\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{2\sqrt{33}}\begin{pmatrix}7\\3\\7\\-5\end{pmatrix}
$$

を得る.

これから例題 7.11 より，U への直交射影は

$$
\begin{aligned}
T\,{}^tT &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-5}{\sqrt{66}} & \frac{7}{2\sqrt{33}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{3}{2\sqrt{33}} \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{66}} & \frac{7}{2\sqrt{33}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{66}} & \frac{-5}{2\sqrt{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-5}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{6}{\sqrt{66}} & \frac{2}{\sqrt{66}} \\ \frac{7}{2\sqrt{33}} & \frac{3}{2\sqrt{33}} & \frac{7}{2\sqrt{33}} & \frac{-5}{2\sqrt{33}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}+\frac{25}{66}+\frac{49}{132} & \frac{1}{6}-\frac{5}{66}+\frac{21}{132} & 0-\frac{30}{66}+\frac{49}{132} & \frac{2}{6}-\frac{10}{66}-\frac{35}{132} \\ \frac{1}{6}-\frac{5}{66}+\frac{21}{132} & \frac{1}{6}+\frac{1}{66}+\frac{9}{132} & 0+\frac{6}{66}+\frac{21}{132} & \frac{2}{6}+\frac{2}{66}-\frac{15}{132} \\ 0-\frac{30}{66}+\frac{49}{132} & 0+\frac{6}{66}+\frac{21}{132} & 0+\frac{36}{66}+\frac{49}{132} & 0+\frac{12}{66}-\frac{35}{132} \\ \frac{2}{6}-\frac{10}{66}-\frac{35}{132} & \frac{2}{6}+\frac{2}{66}-\frac{15}{132} & 0+\frac{12}{66}-\frac{35}{132} & \frac{4}{6}+\frac{4}{66}+\frac{25}{132} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{121}{132} & \frac{33}{132} & \frac{11}{132} & -\frac{11}{132} \\ \frac{33}{132} & \frac{33}{132} & \frac{33}{132} & \frac{33}{132} \\ -\frac{11}{132} & \frac{33}{132} & \frac{121}{132} & -\frac{11}{132} \\ -\frac{11}{132} & \frac{33}{132} & -\frac{11}{132} & \frac{121}{132} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 11 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 11 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 11 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる.

問 8.1　(1) 3, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 1, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) 1, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; 2 (2 重根), $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) 1, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; 2, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; 3, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(4) 2(3 重根), $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(5) 2 (3 重根), $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(6) 0, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 1 (2 重根), $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(7) 1 (3 重根), $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(8) 0 (2 重根), $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 1, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; -1, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(9) 1 (4 重根), $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(10) 固有値は 1（重根）と 3. 1 に属する固有ベクトル：$a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
3 に属する固有ベクトル：$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

問 8.2　定理 8.2 で $\lambda = 0$ としたものである.

問 8.3　行列 A の転置行列 ${}^tA$ に対して, $|A| = |{}^tA|$ であり, ${}^t(xE-A) =$

$xE - {}^tA$ であるから，

$$|xE - A| = |{}^t(xE - A)| = |xE - {}^tA|$$

となり，左辺は A の固有多項式，右辺は ${}^tA$ の固有多項式である．固有値は固有多項式 $= 0$ の解だから，転置行列の固有値はもとの固有値と等しいことがわかる．

問 8.4　スカラーがゼロなら明らかである．そこで，$k \in \mathbb{R}$ をゼロでないスカラーとすると，行列 A のスカラー倍は kA と書ける．

$$xE - kA = k(yE - A) \quad (y = \frac{x}{k})$$

と書けるので，A の固有方程式 $|xE - A| = 0$ の解が α であることと，kA の固有方程式 $|xE - kA| = 0$ の解は $k\alpha$ であることは同値である．したがって，スカラー倍した行列の固有値は，もとの行列の固有値のスカラー倍となる．

問 8.5　直交行列 T は，定義より $T{}^tT = E$ を満たす． また，$|T| = |{}^tT|$ であるから，

$$1 = |E| = |T{}^tT| = |T||{}^tT| = |T|^2$$

である．絶対値の定義は $|x| = \sqrt{x^2}$ だから，直交行列の固有値の絶対値は 1 であることが分かる．

問 8.6　行列 A の固有値を λ とし，λ に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となる．したがって，帰納的に $A^m\boldsymbol{x} = \lambda^m\boldsymbol{x}$ となり，λ^m は A^m の固有値である．

問 8.7　A を正則行列とし，その固有値を λ, λ に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．このとき，定義から $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である．両辺に A^{-1} を施すと，$\boldsymbol{x} = \lambda A^{-1}\boldsymbol{x}$ となるので，$\lambda \neq 0$ で

$$A^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$$

が得られる．したがって，逆行列の固有値はもとの行列の固有値の逆数となる．

問 8.8　行列 A の固有値を λ とし，λ に属する固有（複素）ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると，

$$\begin{aligned} {}^t\overline{(A\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x} &= {}^t\overline{(\lambda\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}|\boldsymbol{x}|^2, \\ {}^t\overline{(A\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x} &= {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,{}^tA\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}A\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\lambda\boldsymbol{x} = \lambda{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \lambda|\boldsymbol{x}|^2. \end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ とすると，$\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ である（($\overline{z}$ は z の共役複素数を表す）．したがたて，$\overline{\lambda} = \lambda$ となり，対称行列の固有値は実数であることが分かる．

問 8.9　A は交代行列だから，問 8.8 と同じ計算で，${}^tA = -A$ を代入して

$$\overline{\lambda} = -\lambda$$

となるので，固有値は純虚数か，または，0 であることが分かる．

問 8.10　$A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ を $n \times n$ 行列とする．任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ について，$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ が成立するなら，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に対して，

$$(A\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{e}_j) = a_{ji} \geq 0$$

となる．

問 8.11 上三角行列 A の対角成分を a_{ii} とすると，固有値は方程式

$$
\begin{aligned}
|xE-A| &= \begin{vmatrix} x-a_{11} & & & & & \\ 0 & x-a_{22} & & & * & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x-a_{n-1n-1} & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & x-a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (x-a_{11})(x-a_{22})\cdots(x-a_{n-1n-1})(x-a_{nn}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

の解であるから，固有値は対角成分である．

問 8.16 (1) 固有多項式 $(x-1)(x+1)^2$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

(2) 固有多項式 $(x-1)^2(x-2)$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

(3) 固有多項式 $(x-1)(x-2)^2$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

(4) 固有多項式 $(x-2)^2(x-3)$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

(5) 固有多項式 $(x-1)^3(x+1)$; $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

(6) 固有多項式 $(x-1)^2(x+1)^2$; $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

問 8.17 (1) 固有多項式 $(x-1)(x+1)$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$.

(2) 固有多項式 $(x-1)(x-2)$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$.

(3) 固有多項式 $(x-2)(x+3)$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & \\ & -3 \end{pmatrix}$.

(4) 固有多項式 $(x-3)(x+3)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & \\ & -3 \end{pmatrix}$.

問 8.19 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

問 8.23 (1) 固有多項式 $(x-1)^2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) 固有多項式 $(x+1)^2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) 固有多項式 $(x-2)^2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(4) 固有多項式 $(x-1)^2$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

問 8.24 (1) 固有多項式は $(x-1)^3$, 固有ベクトルは $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で $\mathbb{R}^3$ の残りの基底として $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を採用する．実際に計算すると，$A\boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$, $A\boldsymbol{p}_3 = -\boldsymbol{p}_1 + 3\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3$ なので，$P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおくと

$$AP = P\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．今の場合は，1 回の操作で上三角化できた．

(2) 固有多項式は $(x-1)^3$ である．1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とし，$P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおき，

実際に計算することにより

$$AP = P\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られる．次に，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし，B の上三角化を考える．$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$BQ = Q\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．$R = \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix}$ とおくと，

$$R^{-1}P^{-1}APR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix}$ とおくと，

$$R^{-1}P^{-1}APR = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

問 8.25 (1) O (2) $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 14 & 25 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 27 & 42 \\ 42 & 70 \end{pmatrix}$

問 8.26 $4E$

問 8.27 (2) x^n

問 8.28 (2) x^n

問 8.30 A_i は k_i 次正方行列とし，

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ O & \tilde{A} \end{pmatrix}$$
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_2 & C \\ O & A_3 \end{pmatrix}$$

とおく．$(A_1 - \lambda_1 E_{k_1})^{n_1-1} \neq O$, $(A_1 - \lambda_1 E_{k_1})^{n_1} = O$ ならば，

$$\begin{aligned} R &= B(\tilde{A} - \lambda_1 E_{k_2+k_3})^{-1} + (A_1 - \lambda_1 E_{k_1})B(\tilde{A} - \lambda_1 E_{k_2+k_3})^{-2} + \cdots \\ &\quad + (A_1 - \lambda_1 E_{k_1})^{n_1-1}B(\tilde{A} - \lambda_1 E_{k_2+k_3})^{-n_1} \\ P' &= \begin{pmatrix} E_{k_1} & R \\ O & E_{k_2+k_3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおくことにより，

$$P'^{-1}AP' = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & \tilde{A} \end{pmatrix}.$$

次に，$\tilde{A}$ を考えよう．$(A_2 - \lambda_2 E_{k_2})^{n_2-1} \neq O$, $(A_2 - \lambda_2 E_{k_2})^{n_2} = O$ ならば，

$$\begin{aligned} R' &= C(A_3 - \lambda_2 E_{k_3})^{-1} + (A_2 - \lambda_2 E_{k_2})C(A_3 - \lambda_2 E_{k_3})^{-2} + \cdots \\ &\quad + (A_2 - \lambda_2 E_{k_2})^{n_2-1}C(A_3 - \lambda_2 E_{k_3})^{-n_2} \\ P'' &= \begin{pmatrix} E_{k_2} & R' \\ O & E_{k_3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおくことにより,

$$P''^{-1}\tilde{A}P'' = \begin{pmatrix} A_2 & O \\ O & A_3 \end{pmatrix}.$$

結局, $\tilde{P} = P'\begin{pmatrix} E_{k_1} & O \\ O & P'' \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\tilde{P}^{-1}A\tilde{P} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix}.$$

問 8.31 (1) $\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. (4) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
(5) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (6) $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3}i & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3}i \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
(7) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}-2 \\ 2-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. (8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
(9) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

問 8.32 (1) 変換行列 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
(2) 変換行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(3) 変換行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

問 8.33　P が直交行列になる条件は，P の列ベクトルが正規直交基底になることである．固有ベクトルを見つけたら，そこからシュミットの直交化法で正規直交基底を作って P を求める．

(1) 固有値 1, 2, 3. $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(2) 固有値 -3, -3, 3, $P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(3) 固有値 2, 2, -4, $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

(4) 固有値 3, 6, 0, $P = 1/3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(5) 固有値 1, 1, 4, 4, $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 & 2 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$.

(6) 固有値 -2, 2, 2, 2, $P = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(7) 固有値 3, 3, 6, 0, $P = 1/\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

問 8.34　A の固有多項式を $\Phi_A(x)$ とする．このとき，A の任意の固有値 λ は，$\Phi_A(\lambda) = 0$ を満たす．また，仮定より $\Phi_A(x)$ の次数は n 次で奇数であるので，$\Phi_A(x) = 0$ は実数解を少なくとも 1 つもつ．その実数解を λ_1 とする．また，A が直交行列であるので $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つ．よって，$\boldsymbol{x}_1$ を固有値 λ_1 の固有ベクトルとすると，$A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1)^2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) \\
&= (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \lambda_1\boldsymbol{x}_1) \\
&= (A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_1) \\
&= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1).
\end{aligned}$$

したがって，$(\lambda_1)^2 = 1$ を満たすので $\lambda_1 = 1$ もしくは -1 となる．

問 8.35　仮定より正則行列 P が存在して $A = PBP^{-1}$ となる．よって，$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(PBP^{-1}) = \mathrm{tr}(BPP^{-1}) = \mathrm{tr}(B)$ となる．以上より示された．

問 8.36　(1) 仮定よりある正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる．ここで，E_{ij} を $n \times n$ 型の行列で (i, j) 成分が 1, それ以外は 0 となる行列とする．このとき，$E_{ii}^2 = E_{ii}$, また，$i \neq j$ のとき $E_{ij}^2 = 0$ が

成り立つ．また，

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 E_{11} + \cdots + \lambda_n E_{nn}$$

となる．ここで，$I_i = PE_{ii}P^{-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned} I_i^2 &= (PE_{ii}P^{-1})^2 \\ &= PE_{ii}^2P^{-1} \\ &= PE_{ii}P^{-1} \\ &= I_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_iI_j &= (PE_{ii}P^{-1})(PE_{jj}P^{-1}) \\ &= PE_{ii}E_{jj}P^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立ち，さらに

$$A = \lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_n I_n$$

となる．
(2)

$$\begin{aligned} A^m &= (\lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_n I_n)^m \\ &= (\lambda_1 I_1)^m + \cdots + (\lambda_n I_n)^m \\ &= (\lambda_1)^m I_1 + \cdots + (\lambda_n)^m I_n. \end{aligned}$$

問 8.37 (1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$.
(2) $a_n = 3^n - 2^{n-1}$, $b_n = 3^n - 2^n$.
(3) $a_n = (3-2n)2^{n-1}$, $b_n = (6n-5)2^{n-1}$.