演習　微分積分学

高知大学理学部数学コース教員編

まえがき

本書は，大学の１および２学年の期間で学ぶ微分積分学の演習書として作成された．全部で６章から成り，初等微分積分学の内容は大方この中に盛り込まれている．編集方針としては，初めに例題を掲げてその解法や基本概念を詳しく解説し，次いで例題に関連した幾つかの演習問題を与え，これら問題に対してはできるだけ詳しい解答を付け加えた．そして，読者がこれらを解くことにより，その数学的考え方を的確に把握できるように配慮した．問題はすべて難し過ぎることのない手頃なものばかりであるから手間暇のかかることをいとわずに，また時には解答を参照しつつも，できるだけ全部の問題を解かれることを希望する．特に意欲のある読者には，一度読んでしばらく間をおいてから，例題の解を隠してこれをあたかも演習問題のつもりで解かれることを奨めたい．そして，解くのに苦労した問題については２度３度と解いてみることにより，その問題の難しさが嘘のように消え失せてしまう事実を是非とも体験していただきたい．

数学の演習問題をただひたすら解く作業は，一見地味で根気の要る仕事ではある．しかし，この努力無しにはとうてい数学の上達は望み得ず，しかも大変重要な数学の一学習過程である．昔から数学に王道無しと言われている由縁である．難しいと思われる問題を解くのは，辛く少なからず苦痛の伴う訓練ではあるが，辛抱強く頑張ってここを突破すれば，初めは予想だにしなかった数学そのものの面白さや問題を解決する無上の喜びを感じ取ることができるようになってくるのである．と同時に，問題を沢山解いて行く中に一筋の光明を見るがごとくに，数学学習法も自ずと体得できるようになってくる．この心境に至って初めて，純白の紙上で数学を展開するのは，あたかも新雪上でスキーを滑るが如し，なる言葉の通り，スキーの技術と同様，数学の場合にも各人の習得程度に応じた心の喜び，つまり数学の素晴らしい世界とその面白さとが，実感できるようになるのである．

微分積分学は，純粋に数学，特に解析学方面の広範な数学的基礎を担う，重要な分野であると同時に，これはまた微分方程式と結びついて多方面に渡って極めて豊かな成果を生み出す原動力ともなっている．今を遡ること約 300 年，17 世紀後半にイギリスの数学者でもあるニュートンとドイツの数学者でもあるライプニッツ等によって創始された微分積分学の出現は，数学史上最大の出来事であると言われている．次いで，18 世紀入るとスイスの数学者オイラーが現れ，正に神業としか言いようのない勢いで微分積分学の内容を豊かにした．そして時代は下がり，19 世紀に入って初めて数学的に厳密な形で，近代解析学の父と呼ばれているフランスの数学者コーシーが，現在広く行き渡っている微分積分学の教科書の原型を世に問うた．このように，300 年余りの輝かしい伝統を受け継ぐ微分積分学は，純粋に数学の発展を促すと共に，応用面では微分方程式と関わりつつ，自然科学，工学，医学は勿論のこと，更には人文・社会科学等に至るまで広範な分野への応用が達成されてきており，また現在達成されつつもある．微分積分の発生と同時に世に出た微分方程式は，微分積分学の整備発展と相俟って，純粋数学と応用数学との両面に渡り数学の世界のから現実の世の中に至るまで多大な影響を与えつつ発展してきている．この点をも考慮して本書では第 6 章に，微分積分学のささやかな延長として極く初歩の微分方程式を数学的な側面に限って記述してみた．この章が読者にとって，応用数学の華とも言われている微分方程式を学ぶ動機付けの一助となり得れば有り難いと思っている．数学を応用しようと考えている人々にとっても，数学の基礎である微分積分学を深く正しく理解してこそ，真の的確な応用が可能となることを忘れてはならない．

この演習書を活用された多くの学習者，即ち数学そのものに関心を持つ人や数学の応用が目的の人，にとって本書が少しでも役に立ちしかも有意義な書であったと思われることを願ってやまない．そして，この微分積分学の演習書に縁のあった読者諸氏の中で，一人でも多くの方々が，

将来確かな成果に恵まれんことを心からお祈り致す.

なお，本書の出版は，高知大学理学部長裁量経費の援助によるものであり，本書出版の趣旨にご理解を賜り，ご支援いただいた高知大学理学部長・長沼英久，副学部長・川村和夫の両先生に心から感謝の意を表す次第である.

2005 年 2 月

著者一同

第 8 刷に向けて

2005 年 3 月に初版が発行されて以来，本書は 2011 年度までの 7 年間「数学概論」および「微分積分学概論」の講義で利用されるとともに，学生の自宅学習用として活用されてきた．このたび，誤植を訂正の上，第 8 刷を発行する運びとなった．出版に際しては，これまで同様に理学部長・逸見豊先生のご理解のもと，理学部長裁量経費から援助を受けることになった．逸見学部長には心から感謝の意を表す次第である．なお，本書の出版は 2011 年度の高知大学年度計画の一環である.

2012 年 1 月

著者一同

目 次

第1章　極限と連続性

1.1　数列の極限

定理 1.1　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ において，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ならば

(1) $\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b \quad (\alpha, \beta$ は定数).

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b} \quad$ (ただし，$b_n \neq 0$，$b \neq 0$).

定理 1.2　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ において，

(1) $a_n \leq b_n$ が成り立ち，それぞれが収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

(2) （**はさみうちの原理**）$a_n \leq c_n \leq b_n$ が成り立ち，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ ならば，数列 $\{c_n\}$ も同じ極限値に収束する．

定理 1.3　（**実数の連続性**）有界な広義の単調数列は収束する．すなわち，上に有界な単調増加数列は収束する．また，下に有界な単調減少数列は収束する．

系 1.4　自然数の全体 $\boldsymbol{N}$ は上に有界でない．

公式 1.5　(1) a を $|a|<1$ である実数とすると，$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

(2) a を 実数とすると，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

(3) 実数 $a>0$ に対して，$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$. 特に，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

(4) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$，$\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

(5) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \alpha$　(α は実数).

例題 1.1

次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}}{2^n+3^n}$　　(2) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$　　(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$

解　(1) 公式：$|a|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ より，$\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = 3.$$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} = \infty$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.\end{aligned}$$

(3) $-1 \leq \sin n \leq 1$ であるから

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

(4) $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ とすると，公式 1.5(4) より $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$．ゆえに公式 1.5(5) より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

問 1.1　次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(1+2^2+\cdots+n^2)$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

例題 1.2

数列 $\{a_n\}$ が次を満たすとする：

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots).$$

(1) $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列であることを示せ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

解　(1) 数学的帰納法より，すべての $n = 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$a_n > \sqrt{2}$ であることを示す．$n = 1$ のときは明らかである．$a_n > \sqrt{2}$ と仮定すると

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2a_n}\left(a_n - \sqrt{2}\right)^2 > 0$$

であるから，成立する．よって，$\{a_n\}$ は下に有界な数列である．また，$a_n^2 > 2$ であるから

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - 2\right) > 0.$$

したがって，$\{a_n\}$ は単調減少数列であるから証明された．
(2) 実数の連続性（定理 1.3）から，(1) によって数列 $\{a_n\}$ は収束する．極限値を $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ として，与えられた漸化式の両辺において $n \to \infty$ とすると，

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right)$$

となり，これを解くと，$\alpha = \pm\sqrt{2}$．ところで，$\alpha \geq \sqrt{2}$ であるから，$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

注意：$a_n > \sqrt{2}$ であることは，次のように推測する．極限が存在すると仮定して，(2) のように極限値 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ を求める．数列 $\{a_n\}$ は単調減少であるから（と仮定して），$a_n > \sqrt{2}$ であると推測できる．$a_n \geq \sqrt{2}$ と推測してもよい.

問 1.2　数列 $\{a_n\}$ が次を満たすとする：

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots).$$

(1) $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であることを示せ.

(2) 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

1.2　関数の極限

定理 1.6　関数 $f(x)$ と $g(x)$ において，$\lim_{x\to a} f(x) = A$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = B$ ならば

(1) $\lim_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B$　(α, β は定数).

(2) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.

(3) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$　(ただし，$g(x) \neq 0$，$B \neq 0$).

定理 1.7　定義域 D 上の関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ において，

(1) D 上で $f(x) \leq g(x)$ が成り立ち，$x = a \in D$ において，極限値がともに存在するとき，$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

(2) (**はさみうちの原理**) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ が成り立ち，$x = a \in D$ において，f，g の極限値がともに存在し，$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ ならば，$\lim_{x\to a} h(x)$ も同じ極限値に収束する.

公式 1.8　(1) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$，$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

例題 1.3

正の整数 n に対して，次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$　　(2) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1}$

解　(1) $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$ であるから，

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = n.$$

(2) $y = \sqrt[n]{x}$ とおくと，$x \to 1$ のとき $y \to 1$ であるから，上の (1) より

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{y\to 1} \frac{y - 1}{y^n - 1} = \frac{1}{n}.$$

問 1.3　次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^3 - 8}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+1}}{x-2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - x + 2}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}{x}$

例題 1.4

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

解　(1) 三角関数の半角の公式と公式 1.8(2) より

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\sin \frac{x}{2})^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

(2) $n = [x]$ とする．ただし，$[x]$ は x の整数部分である．このとき，$x > 1$ において，$n \leq x < n + 1$ であるから，

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

ところで，公式 1.5(4) より

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

問 1.4　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

1.3　連続関数と逆関数

定義 1.9　定義域 D 上の関数 $f(x)$ において，

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

であるとき，$f(x)$ は**点** $x=a$ **において連続**であるという．また，$f(x)$ がすべての点 $x\in D$ において連続であるとき，$f(x)$ は D **で連続**であるという．

定理 1.10　定義域 D 上の関数 $f(x)$，$g(x)$ が連続関数ならば，

(1) $f(x)+g(x)$ も連続関数である．

(2) $cf(x)$ も連続関数である（c は定数）．

(3) $f(x)g(x)$ も連続関数である．

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も連続関数である（ただし，$g(x)\neq 0$）．

定理 1.11　$y=f(x)$ の値域が $z=g(y)$ の定義域に含まれているとする．このとき，$f(x)$ が $x=x_0$ で，$g(y)$ が $y=f(x_0)$ でそれぞれ連続ならば，**合成関数** $z=g(f(x))$ は $x=x_0$ で連続である．

定理 1.12　(**中間値の定理**) 関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 k に対して，$a < c < b$ となる c で $f(c) = k$ を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．

系 1.13　関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続で，$f(a) \cdot f(b) < 0$ ならば，方程式 $f(x) = 0$ の解が存在する．

定理 1.14　閉区間で連続な関数は有界である．

定理 1.15　閉区間で連続な関数は，最大値と最小値をとる．

定義 1.16　双曲線関数を次で定義する：

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

例題 1.5

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(1+x)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

解　(1) $x \to 0$ のとき $\left|\dfrac{1}{x}\right| \to \infty$ である．したがって，例題 1.4(2)，問 1.4(2) により，

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

ところで，対数関数は連続であるから，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(1+x) &= \lim_{x\to 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} \\
&= \log\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) \\
&= \log e = 1.
\end{aligned}$$

(2) $e^x - 1 = y$ とおく．$x \to 0$ のとき $y \to 0$ だから，(1) を利用すると，

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{y}{\log(y+1)} \to 1.$$

問 1.5　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

例題 1.6

次の関数がすべての点で連続となるように定数 a の値を定めよ．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x > 1) \\ a & (x \leq 1) \end{cases}$$

解　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$ であるから，$a = 2$ のときに限り $f(x)$ は $x = 1$ で連続になる．他の点では明らかに連続であるから，求める値は $a = 2$ である．

問 1.6　次の関数がすべての点で連続となるように定数 a，b の値を定めよ．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+a}{x-1} & (x > 1) \\ b & (x \leq 1) \end{cases}$$

例題 1.7

$a > 0$ で n が正の整数であるとき，$x^n - a = 0$ は正の解をもつことを示せ．

解　$f(x) = x^n - a$ とすると，$f(x)$ は連続で，$f(0) = -a < 0$．また，十分大きな $b > 0$ に対して，$f(b) = b^n - a > 0$．したがって，$f(0) \cdot f(b) < 0$．系 1.13 から，区間 $[0, b]$ で $f(x) = 0$ は解をもつ．よって，$x^n - a = 0$ は正の解をもつ．

問 1.7　$x - \cos x = 0$ は，$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ において解をもつことを示せ．

例題 1.8

次を示せ．

(1) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$　　(2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(3) $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$　　(4) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1 + x}{1 - x}$

解　(1) $y = \sin^{-1} x$，$z = \cos^{-1} x$ とおくと，$x = \sin y$，$x = \cos z = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$．したがって，$\sin y = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$．$-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} \leq \dfrac{\pi}{2} - z \leq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$y = \dfrac{\pi}{2} - z$．よって，$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = y + z = \dfrac{\pi}{2}$．
(2) 定義より

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}((e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(3) $y = \sinh^{-1} x$ とおくと，$x = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$．$t = e^y$ とおくと，$2x = t - \dfrac{1}{t}$，すなわち，$t^2 - 2xt - 1 = 0$．これを解くと，$t = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$．$t > 0$ より，$t = x + \sqrt{x^2 + 1}$．したがって，$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$．よって，$\sinh^{-1} x = y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$．

(4) $y = \tanh^{-1} x$ とおくと，$x = \tanh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$．$t = e^y$ とおいて整理すると，$t^2 = \dfrac{1+x}{1-x}$．$t > 0$ より，$t = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$．したがって，$e^y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$．よって，$\tanh^{-1} x = y = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

問 1.8　次を示せ.

(1) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$.　　(2) $\sin^{-1}\dfrac{3}{5} + \sin^{-1}\dfrac{4}{5} = \dfrac{\pi}{2}$.

(3) $\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$.　　(4) $\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{x+1}{x-1}$.

(5) $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$　(n は整数).

第2章　微分法

2.1　微分係数，導関数

定義 2.1　関数 $f(x)$ は $x = x_0$ の近傍で定義されているとする．極限値

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x = x_0$ で**微分可能**であるといい，この極限値を $f(x)$ の $x = x_0$ における**微分係数**と呼び,

$$f'(x_0)$$

と表す．極限値

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \text{ または, } \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x = x_0$ で**右微分可能**，または，**左微分可能**であるといい，この極限値を**右微分係数**，**左微分係数**と呼び，それぞれ

$$f'_+(x_0), \quad f'_-(x_0)$$

で表す．微分可能であるとは，左右の微分係数がともに存在して，それらが一致することである．

　関数 $f(x)$ の $x = x_0$ における微分係数 $f'(x_0)$ は，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0, f(x_0))$ における曲線の**接線の傾き**を表す.

定理 2.2　関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能ならば，$x = x_0$ で連続である．

例題 2.1

関数 $f(x) = |x|$ の $x = 0$ における微分可能性を調べよ．

解　$f(h) = |h|$ であるから，

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & (h \geq 0) \\ -1 & (h < 0) \end{cases}$$

である．ゆえに，$f'_+(0) = 1$，$f'_-(0) = -1$ である．したがって，$f(x)$ は $x = 0$ において微分不可能である．

コメント：関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ において連続であるが，微分不可能である．定理 2.2 の逆は成立しない．

問 2.1　関数 $f(x) = x|x|$ の $x = 0$ における微分可能性を調べよ．

定義 2.3　関数 $y = f(x)$ が区間の I の各点で微分可能であるとき，$f(x)$ は I **上で微分可能**であるという.（ただし，I の端点が I に属しているとき，そこでは片側微分係数をもつだけでよい.）このとき，I の各点 x_0 における微分係数 $f'(x_0)$ を x_0 の関数と考え，この関数を $y = f(x)$ の**導関数**といい，

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}$$

などで表す．関数 $f(x)$ の導関数を求めることを，$f(x)$ を**微分する**という．

例題 2.2

次の関数を微分せよ．

(1) $y = c$ (c は定数)　　(2) $y = x^n$ (n は自然数)　　(3) $y = \sin x$

解　(1) $(c)' = \lim_{h \to 0} \dfrac{c - c}{h} = 0.$
(2) まず，$(x+h)^n$ を二項定理を用いて展開すると

$$(x+h)^n = {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1} h + \cdots + {}_nC_n h^n$$

である．よって，

$$\begin{aligned}&\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\&= {}_nC_1 x^{n-1} + {}_nC_2 x^{n-2} h + \cdots + {}_nC_n h^{n-1} \to {}_nC_1 x^{n-1} \ (h \to 0)\end{aligned}$$

となる．ゆえに，$(x^n)' = {}_nC_1 x^{n-1} = nx^{n-1}$ である．
(3) まず，三角関数の和→積の公式により

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

である．よって，

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\cos(x + \frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

であるが，

$$\lim_{h \to 0}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x, \quad \lim_{h \to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

であることに注意すれば (公式 1.8)，

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

を得る．

問 2.2　関数 $y = \cos x$ を微分せよ．

例題 2.3

次の関数を微分せよ．

(1) $y = e^x$　　(2) $y = \log x \ (x > 0)$

解　(1) まず，指数法則により

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

である．

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

に注意すれば (例題 1.5(2))，$(e^x)' = e^x$ を得る．

(2) まず，対数の性質から

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{h} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}$$

である．

$$\lim_{k \to 0} \frac{\log(1+k)}{k} = 1$$

に注意すれば (例題 1.5(1))，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ を得る．

問 2.3　関数 $y = \log(-x) \ (x < 0)$ を微分せよ．

公式 2.4　$$(\log |x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

定理 2.5　関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能な点では，これらの和，差，定数倍，商も微分可能で，導関数は次の式で与えられる．

(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \quad (kf(x))' = kf'(x)$

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(3) $\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)' = \dfrac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$

定理 2.6　(**合成関数の微分**) 関数 $y = f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能で，関数 $z = g(y)$ が $y = f(x_0)$ で微分可能ならば，合成関数 $z = (g \circ f)(x)$ は $x = x_0$ で微分可能となり，

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

が成り立つ.

微分可能な関数 $y = f(x)$，$z = g(y)$ の合成関数 $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ の導関数は定理 2.6 より

$$z' = g'(f(x))f'(x) \tag{2.1}$$

である．ここで，$g'(f(x))$ は $g(y)$ の y に関する導関数 $g'(y)$ に $y = f(x)$ を代入したものである．これは次のように表すと見やすい.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{2.2}$$

(2.1), (2.2) を**合成関数の微分公式**という.

例題 2.4

k を定数とする．このとき，

$$(x^k)' = kx^{k-1} \ (x > 0)$$

が成り立つ.

解　$x^k = (e^{\log x})^k = e^{k\log x}$ である．そこで，$z = e^y$，$y = k\log x$ とおく．すると，z は y に関して微分可能，y は x に関して微分可能であるので，合成関数の微分公式を適用することができる．

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = e^y\cdot k\frac{1}{x} = k\frac{e^{k\log x}}{x} = k\frac{x^k}{x} = kx^{k-1}.$$

コメント：$y = x^k$ $(x > 0)$ とおき，両辺の対数をとると，

$$\log y = k\log x \tag{2.3}$$

を得る．そこで，両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y}\cdot y' = k\frac{1}{x} \tag{2.4}$$

を得る．(2.5) より

$$y' = k\frac{y}{x} = kx^{k-1}$$

を導くことができる．このように両辺の対数をとって微分する計算法を**対数微分法**という．ところで，(2.3) の左辺の微分では関数 y の x に関する微分可能性と合成関数の微分公式を使っている．(2.3) より $y = e^{k\log x}$ であるから y は x に関して微分可能である．

問 2.4　次の関数を微分せよ．

(1) $\tan x$　(2) $\log_a|x|$ $(x \neq 0)$　(3) $\sqrt{1+x^2}$　(4) a^x $(a > 0)$
(5) $\log|x + \sqrt{x^2 + A}|$ (A は定数)　(6) x^x $(x > 0)$

定理 2.7　（**逆関数の微分**）関数 $y = f(x)$ はある区間で連続かつ狭義単調とする．$f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能で，$f'(x_0) \neq 0$ であれば，逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は $y = y_0$ $(= f(x_0))$ で微分可能で

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{2.5}$$

が成り立つ．(2.5) を導関数の形で書くと

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

これは，次のように表すと見やすい．

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

例題 2.5

$$(\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

解　$y = \cos x$ は閉区間 $[0, \pi]$ で狭義減少かつ微分可能で，

$$y' = -\sin x \neq 0,\ 0 < x < \pi$$

である．よって，逆関数 $x = \cos^{-1} y$ は開区間 $(-1, 1)$ で微分可能である．逆関数の微分法により，

$$(\cos^{-1} y)' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{(-\sin x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

を得る．ここで，変数 y を変数 x に置き換えればよい．

コメント：逆余弦関数 $x = \cos^{-1} y$ は閉区間 $[-1, 1]$ で定義されいるが，$y = \pm 1$ では微分できない．余弦関数 $y = \cos x$ の導関数 $y' = -\sin x$ の $x = 0,\ \pi$ での値は 0 であることに注意する．

問 2.5　次を示せ．

(1) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$(-1 < x < 1)$.

(2) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$　$(-\infty < x < \infty)$.

定理 2.8　（媒介変数による微分） $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ において，$x=\varphi(t)$ は狭義単調とすると，y は x の関数と考えられる．このとき，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ が微分可能で，$\varphi'(t)\neq 0$ ならば，y は x の関数として微分可能で

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

が成り立つ.

例題 2.6

半径 a の円が滑ることなく一定直線上を転がるとき，円周上の固定された1点の描く軌跡を**サイクロイド**という．xy 座標を適当にとって，媒介変数 θ によりその方程式は

$$x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$$

となる．$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

解　まず,

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta),\quad \frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$$

である．$\dfrac{dx}{d\theta}>0\ (0<\theta<2\pi)$，そして，$x=a(\theta-\sin\theta)$ は $0\leq\theta\leq 2\pi$ において狭義単調増加である．よって，定理 2.8 により,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\quad(0<\theta<2\pi)$$

となる.

問 2.6　楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ は

$$C : x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$$

と媒介変数 θ を用いて表すことができる．C 上の点 $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{\sqrt{3}b}{2}\right)$ における微分係数を求めよ．

問 2.7　次の曲線について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1) $C : x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t.$　(2) $C : x = \dfrac{3at}{1+t^3},\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}.$

2.2　平均値の定理，テイラーの定理

定理 2.9　（**ロールの定理**）関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能とする．このとき，$f(a) = f(b)$ ならば，$f'(c) = 0$ を満たす c $(a < c < b)$ が存在する．

コメント：関数 $f(x)$ は区間の端点 $x = a$, $x = b$ で微分可能でなくてもよい．

問 2.8　関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で微分可能であり，$f'(a) < A < f'(b)$ とする．このとき

$$f'(c) = A$$

となるような c $(a < c < b)$ が存在することを示せ．

定理 2.10　（**平均値の定理**）関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能とする．このとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たす c $(a < c < b)$ が存在する．

系 2.11　**（関数の増減）** 関数 $f(x)$ は区間 I で微分可能とする．このとき，
(1) $f(x)$ が I で単調増加（単調減少）であるための必要十分条件は，I 上 $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) となることである．
(2) $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) ならば，$f(x)$ は I で狭義単調増加（狭義単調減少）である．
(3) $f(x)$ が定数関数であるための必要十分条件は，$f'(x) = 0$ となることである．

例題 2.7

次の不等式を示せ．

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

解　$f(x) = \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$ とおく．$f'(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi}$ である．

$$f(0) = 0,\ f'(x) > 0 \quad \left(0 < x < \cos^{-1}\frac{2}{\pi}\right)$$

であるから，

$$f(x) > 0 \quad \left(0 < x < \cos^{-1}\frac{2}{\pi}\right)$$

である．また，

$$f'(x) < 0 \quad \left(\cos^{-1}\frac{2}{\pi} < x < \frac{\pi}{2}\right), \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

であるから，

$$f(x) > 0 \quad \left(\cos^{-1}\frac{2}{\pi} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

である．

問 2.9　次の不等式を証明せよ．

(1) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \sin x < x \quad (x > 0)$.

(2) $1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} \quad (x \neq 0)$.

(3) $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \quad (x > -1,\ x \neq 0)$.

定義 2.12　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $x = x_0$ で微分可能なとき，その微分係数を $f''(x_0)$ とかき，これを関数 $f(x)$ の $x = x_0$ における**第 2 次の微分係数**という．$f'(x)$ が各点で微分可能であるとき，その導関数を $f''(x)$ とかき，これを $f(x)$ の **2 階導関数**と呼ぶ．$f(x)$ を順次に n 回微分して得られる関数を $f(x)$ の n **階導関数**と呼び，これを $f^{(n)}(x)$ とかく．2 階以上の導関数を総称して**高階導関数**と呼ぶ．$y = f(x)$ の n 階導関数を

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

ともかく．なお，$f^{(0)}(x) = f(x)$ と規約する．

例題 2.8

$y = \sin x$ のとき，

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

である．

解　n に関する数学的帰納法で示す．$n = 0$ のときは明らか．$n = k$

のとき成り立つとして，$n=k+1$ のとき，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left\{\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right\}' \\ &= \cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ.

問 2.10　$y=\cos x$ のとき，

$$y^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

を示せ.

問 2.11　次の関数の n 階導関数を求めよ.

(1) $\cos x\cos 2x$　(2) $\log(1+x)$　(3) $\dfrac{1}{1-x^2}$　(4) $x^k\ (x>0)$

定義 2.13　関数 $f(x)$ について，n 階までの導関数が存在するとき，$f(x)$ は n **回微分可能**であるという．このとき，$f^{(n)}(x)$ が連続ならば，$f(x)$ は n **回連続微分可能**あるいは C^n **級**であるという．$f(x)$ が何回でも微分可能であるとき，**無限回微分可能**，あるいは C^∞ **級**であるという.

定理 2.14　関数 $f(x)$, $g(x)$ が n 回微分可能ならば，$f\pm g$，cf (c は定数)，fg も n 回微分可能であって，次が成り立つ.

(1) $(f\pm g)^{(n)}=f^{(n)}\pm g^{(n)},\quad (cf)^{(n)}=cf^{(n)}$

(2) $(fg)^{(n)}=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r f^{(r)}g^{(n-r)}$　**（ライプニッツの公式）**

例題 2.9

関数 $y=x^2e^x$ の n 階導関数を求めよ.

解　ライプニッツの公式を用いる．

$$
\begin{aligned}
y^{(n)} &= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r (x^2)^{(r)} (e^x)^{(n-r)} \\
&= {}_nC_0 x^2 e^x + {}_nC_1 2xe^x + {}_nC_2 2e^x \\
&= \{x^2 + 2nx + n(n-1)\} e^x .
\end{aligned}
$$

問 2.12　次の関数の n 階導関数を求めよ．

(1) $x^2 \sin x$　　(2) $e^x \sin x$

定理 2.15　（**テイラーの定理**）関数 $f(x)$ が区間 I で n 回微分可能であるとき，I の任意の 2 点 a, b に対し，

$$
\begin{aligned}
f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\
+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n
\end{aligned}
$$

とおくと，次を満たす c が a と b の間に存在する．

$$
R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \quad \textbf{（ラグランジュの剰余項）}
$$

系 2.16　（**テイラーの定理**）関数 $f(x)$ が $x = a$ を含む区間 I で n 回微分可能であるとき，I の任意の点 x に対し，

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\
+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n
\end{aligned}
$$

とおくと，

$$
R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)) \quad (0 < \theta < 1)
$$

と表すことができる．

関数 $f(x)$ が無限回微分可能であるとき，$R_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であれば

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

となる．これを $f(x)$ の $x = a$ における**テイラー展開**と呼ぶ．特に，$a = 0$ のときは

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

となり，これを $f(x)$ の**マクローリン展開**と呼ぶ．

例題 2.10

主な関数のマクローリン展開をあげる．

(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots \quad (|x| < \infty)$.

(2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (|x| < \infty)$.

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (|x| < \infty)$.

(4) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots \quad (|x| < 1)$.

解　(1) $f(x) = e^x$ とおく．例題 2.3 より $f^{(n)}(x) = e^x$ である．したがって

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!}e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

である．ところで，公式 1.5(2) より

$$|R_n| \leq \frac{|x|^n}{n!}e^{|x|} \to 0 \ (n \to \infty)$$

である．
(2) $f(x) = \sin x$ とおく．例題 2.8 より

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

である．したがって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1},$$

$$R_{2n+1} = (-1)^n \frac{\sin(\theta x + \frac{(2n+1)\pi}{2})}{(2n+1)!}x^{2n+1} \ (0 < \theta < 1)$$

である．ところで,

$$|R_{2n+1}| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0 \ (n \to \infty).$$

問 2.13　例題 2.10(3) を証明せよ.

問 2.14　次の展開式を示せ.
(1) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad (|x| < 1).$
(2) $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots \quad (|x| < 1).$
(3) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x} = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \cdots + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad (|x| < 1).$

問 2.15　関数 e^x のマクローリン展開に形式的に $x = i\theta$ ($i = \sqrt{-1}$) を代入して

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (\textbf{オイラーの公式})$$

を導け.

2.3　微分の応用

定理 2.17　（コーシーの平均値の定理） 関数 $f(x)$，$g(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能とし，(a,b) で $g'(x) \neq 0$ とする．このとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす c $(a<c<b)$ が存在する．

定理 2.18　（ロピタルの定理）
(1) $f(x)$，$g(x)$ は $x=a$ の近傍で連続，a を除いて微分可能，$g'(x) \neq 0$，$f(a)=g(a)=0$ とする．このとき，極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (-\infty \leq l \leq \infty)$$

が存在するならば，極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

も存在して l に等しい．
(2) $f(x)$, $g(x)$ は $x=a$ の近傍で a を除いて微分可能，$g'(x) \neq 0$ とする．さらに，$x \to a$ のとき $g(x) \to \infty$ とする．このとき，極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (-\infty \leq l \leq \infty)$$

が存在するならば，極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

も存在して l に等しい．

(1), (2) は $x \to a \pm 0$, $x \to \pm\infty$ の場合も同様に成り立つ．

例題 2.11

ロピタルの定理を用いて，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{\cos x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}$　$(\alpha>0)$

解　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$

(2) 対数をとると，

$$\cos x\log\tan x=\frac{\log\tan x}{\frac{1}{\cos x}}.$$

ところで,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\log\tan x}{\frac{1}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\tan x\sin x}=0.$$

よって,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\cos x\log\tan x}=e^0=1.$$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$

問 2.16　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$　$(a,b>0)$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

例題 2.12

テイラーの定理（系 2.16）を用いて，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$　$(a,b>0)$

解　(1) $f(x) = \sin x$ とおく．テイラーの定理（系 2.16）により，

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + R_5,$$
$$R_5 = \frac{x^5}{5!}f^{(5)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1)$$

と表すことができる．例題 2.8 により，$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ であるから，

$$f(0) = 0,\ f^{(1)}(0) = 1,\ f^{(2)}(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,$$
$$R_5 = \frac{x^5}{5!}\sin\left(\theta x + \frac{5\pi}{2}\right) \quad (0 < \theta < 1).$$

ゆえに，

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5,\ R_5 = \frac{x^5}{5!}\sin\left(\theta x + \frac{5\pi}{2}\right) \quad (0 < \theta < 1)$$

と展開できる．したがって，

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} - \frac{R_5}{x^3}.$$

ところで，

$$\left|\ \frac{R_5}{x^3}\ \right| = \left|\ \frac{x^2}{5!}\sin\left(\theta x + \frac{5\pi}{2}\right)\ \right| \leq \frac{|x|^2}{5!} \to 0\ (x \to 0)$$

だから

$$\frac{x - \sin x}{x^3} \to \frac{1}{6}\ (x \to 0)$$

となる．

(2) $(a^x)' = (\log a)a^x$，$(a^x)'' = (\log a)^2 a^x$ である．よって，

$$a^x = 1 + (\log a)x + \frac{x^2}{2}(\log a)^2 a^{\theta x}\ (0 < \theta < 1)$$

と展開できる．同様に

$$b^x = 1 + (\log b)x + \frac{x^2}{2}(\log b)^2 b^{\theta' x} \quad (0 < \theta' < 1).$$

よって，

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \log a - \log b + \frac{x}{2}\{(\log a)^2 a^{\theta x} - (\log b)^2 b^{\theta' x}\}$$

$x \to 0$ のとき，$\theta x \to 0$，$\theta' x \to 0$ であることに注意すれば

$$\frac{a^x - b^x}{x} \to \log a - \log b \ (x \to 0)$$

となる．

問 2.17　テイラーの定理（系 2.16）を用いて，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

定義 2.19　関数 $f(x)$ が $x = c$ の近傍で定義されていて，$x = c$ の十分近くでは $x = c$ を除いて

$$f(x) < f(c) \quad (f(x) > f(c))$$

を満たすとき，$f(x)$ は $x = c$ において**極大**（**極小**）となるといい，$f(c)$ を**極大値**（**極小値**）と呼ぶ．極大値，極小値を総称して**極値**と呼ぶ．

定理 2.20　関数 $f(x)$ が $x = c$ において極値をとり，かつ，$x = c$ で微分可能ならば $f'(c) = 0$ である．

定理 2.21　関数 $f(x)$ は $x = c$ で連続で，十分小さな $h > 0$ をとると，

(i) $c - h < x < c$ において微分可能，そこで $f'(x) > 0$ (< 0)

(ii) $c < x < c + h$ において微分可能，そこで $f'(x) < 0$ (> 0)

とする．このとき，$f(x)$ は $x = c$ において極大（極小）となる．

コメント： この定理は増減表を書くことに対する根拠を与える．

x		c	
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

定理 2.22 （**高次導関数と極値**）関数 $f(x)$ が点 $x=a$ を含む区間 I で C^n 級で，

$$f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\quad f^{(n)}(a)\neq 0$$

とする．このとき，次が成り立つ．
(1) n が偶数で $f^{(n)}(a)>0$ のとき，$f(x)$ は $x=a$ で極小値をとる．
(2) n が偶数で $f^{(n)}(a)<0$ のとき，$f(x)$ は $x=a$ で極大値をとる．
(3) n が奇数のとき，$f(x)$ は $x=a$ で極値をとらない．

例題 2.13

$f(x)=3x^4-4x^3-24x^2+48x-15$ の極値を求めよ．

解

$$f'(x)=12x^3-12x^2-48x+48=12(x+2)(x-1)(x-2),$$
$$f''(x)=36x^2-24x-48=12(3x^2-2x-4).$$

$f'(x)=0$ となるのは，$x=-2,\ 1,\ 2$ のときであり，

$$f''(-2)=144>0,\quad f''(1)=-36<0,\quad f''(2)=48>0.$$

これより，$x=-2$ で極小値 $f(-2)=-127$，$x=1$ で極大値 $f(1)=8$，$x=2$ で極小値 $f(2)=1$ をとる．

問 2.18 　次の関数の極値を求めよ．
(1) $x^3+3x^2+12x-5$ 　(2) $\sqrt{x^2+x^3}$ 　(3) $x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$

定義 2.23　$f(x)$ を区間 I で定義された関数とする．曲線 $y = f(x)$ $(x \in I)$ 上の任意の異なる 2 点 A, B に対して，A, B の間にある曲線 $y = f(x)$ の部分が弦 AB の上側にないとき，$f(x)$ は I で**下に凸**であるという．このことを式で表すと，次のようになる．$a < x < b$ を満たす I の任意の 3 点 a, x, b に対して，

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

が成り立つ．

定理 2.24　関数 $f(x)$ が 2 回微分可能であるとき，$f(x)$ が区間 I で下に凸であるための必要十分条件は，区間 I で $f''(x) \geq 0$ となることである．

定義 2.25　上の不等式おいて，不等号をすべて逆向きにした不等式が区間 I で成り立っているとき，すなわち，$-f(x)$ が区間 I で下に凸であるとき，$f(x)$ は区間 I で**下に凹**であるという．

関数の凹凸の種類が，点 $(a, f(a))$ の左右で変わるとき，このような点を**変曲点**という．

問 2.19　次の関数の増減，凹凸を調べ，グラフを描け．

(1) $y = x^3 - x + 2$　(2) $\dfrac{x}{x^2 + 1}$　(3) $y = x \log x$　(4) $y = x^{\frac{2}{3}}$

第3章　積分法

3.1　不定積分

定義 3.1　$F'(x) = f(x)$ であるとき，$F(x)$ は関数 $f(x)$ の**原始関数**と呼ばれる．ある原始関数 $F(x)$ に定数を加えてもまた原始関数である．すべての原始関数は $F(x)$ に定数を加えることによって得られる．すべての原始関数全体を**不定積分**と呼び，次のように表す.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

C は**積分定数**と呼ばれる.（しかし，積分定数は省略することも多く，この章以降でもそれに倣う.）

定理 3.2　（不定積分の性質）

(1) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

(2) $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \quad (a \text{ は定数}).$

(3) $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx,$

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx.$$

(4) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt \quad (x = g(t)).$

公式 3.3　（初等関数の積分公式）

(1) $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} \quad (a \neq -1).$

(2) $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \log|x|.$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (a > 0).$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad (a > 0).$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \quad (a > 0).$

(6) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) \quad (a > 0).$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| \quad (a \neq 0).$

(8) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|) \quad (a \neq 0).$

(9) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x.$

(10) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x.$

(11) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|.$

(12) $\displaystyle\int \cot x\,dx = \log|\sin x|.$

(13) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \log\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|.$

(14) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$

(15) $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - x.$

(16) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}.$

(17) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}.$

(18) $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x.$

(19) $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x.$

例題 3.1

(1) $f(x)=(x+1)^2+x$ の原始関数 $F(x)$ で $F(0)=0$ となるものを求めよ.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ の原始関数 $F(x)$ で $F(1)=0$ となるものを求めよ.

(3) $f(x)=\cos x+2e^x$ の原始関数 $F(x)$ で $F(0)=0$ となるものを求めよ.

解　(1) $F(x)=\int f(x)\,dx=\frac{1}{3}(x+1)^3+\frac{1}{2}x^2+C.$
ゆえに，$F(0)=\frac{1}{3}+C=0$ より，$F(x)=\frac{1}{3}(x+1)^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}.$
(2) $F(x)=\int f(x)\,dx=\log|x-5|+C.$
ゆえに，$F(1)=\log 4+C=0$ より，$F(x)=\log|x-5|-\log 4.$
(3) $F(x)=\int f(x)\,dx=\sin x+2e^x+C.$
ゆえに，$F(0)=2+C=0$ より，$F(x)=\sin x+2e^x-2.$

問 3.1　次の関数の原始関数で $F(0)=0$ となるものを求めよ．
(1) $(x+1)^5$　　(2) $\dfrac{1}{(x+3)^2}$　　(3) $\log(x+1)$

例題 3.2

(1) $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であるとき，$f(px+q)$ $(p\neq 0)$ の不定積分は $\dfrac{1}{p}F(px+q)$ である．
(2) $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であるとき，次が成り立つ．

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}dx=\log|F(x)|.$$

解　(1) 不定積分を微分すると被積分関数が求まる．実際に微分してみると，合成関数の微分の公式より

$$\left(\frac{1}{p}F(px+q)\right)'=\frac{1}{p}F'(px+q)(px+q)'=f(px+q)$$

となるので，$\dfrac{1}{p}F(px+q)$ が求める不定積分であることがわかる．
(2) $\log|F(x)|$ を微分して $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ が得られることによりわかる．

例題 3.3

次の不定積分を求めよ.

(1) $(2x+3)^5$ (2) $\dfrac{1}{(2x+3)^5}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ (4) $\sin 2(x+2)$

(5) e^{3x+1} (6) $\dfrac{1}{4(x+1)^2+1}$ (7) $\dfrac{1}{2x^2+4x+3}$ (8) $\dfrac{1}{x^2+2x}$

(9) $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+4x}}$

解 (1) $\displaystyle\int (2x+3)^5\,dx = \frac{1}{2}\frac{1}{5+1}(2x+3)^{5+1} = \frac{1}{12}(2x+3)^6.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+3)^5}\,dx = \frac{1}{2}\frac{1}{-5+1}(2x+3)^{-5+1} = -\frac{1}{8(2x+3)^4}.$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx = \frac{1}{2}\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(2x+3)^{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{2x+3}.$

(4) $\displaystyle\int \sin 2(x+2)\,dx = \frac{1}{2}(-\cos 2(x+2)) = -\frac{1}{2}\cos 2(x+2).$

(5) $\displaystyle\int e^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x+1}.$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{4(x+1)^2+1}\,dx = \int \frac{1}{(2x+2)^2+1}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+2).$

(7) $2x^2+4x+3 = (\sqrt{2}x+\sqrt{2})^2+1$ より

$$\int \frac{1}{2x^2+4x+3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}(x+1).$$

(8) $x^2+2x = (x+1)^2-1$ より

$$\int \frac{1}{x^2+2x}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{(x+1)-1}{(x+1)+1}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x}{x+2}\right|.$$

(9) $-x^2+4x = 4-(x-2)^2$ より

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x-2}{2}.$$

問 3.2　次の不定積分を求めよ.

(1) $\sqrt{1-2x}$　(2) $\dfrac{1}{(2-3x)^3}$　(3) $\dfrac{1}{x^2-2x+2}$　(4) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}}$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{8-4x^2}}$　(6) $\dfrac{1}{x\log x}$

例題 3.4

部分積分を用いて次の積分を求めよ.

(1) $(x-1)(2x-3)^{10}$　(2) $x^2\log x$　(3) $x^2\sin x$　(4) $e^{ax}\cos bx$

(5) $\cos^2 x$　(6) $\cos^4 x$

解　(1) $(2x-3)^{10}$ を展開して計算することもできるが，計算は大変ややこしくなる．部分積分の公式によると

$$\begin{aligned}\int (x-1)(2x-3)^{10}\,dx &= (x-1)\frac{1}{2}\,\frac{1}{11}(2x-3)^{11} - \int \frac{1}{22}(2x-3)^{11}dx \\ &= \frac{1}{22}(x-1)(2x-3)^{11} - \frac{1}{22}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{12}(2x-3)^{12} \\ &= \frac{1}{528}(22x-21)(2x-3)^{11}.\end{aligned}$$

あるいは，$(x-1)(2x-3)^{10} = \dfrac{1}{2}(2x-3)^{11} + \dfrac{1}{2}(2x-3)^{10}$ と変形して積分してもよい.

(2) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ を利用して部分積分を行う.

$$\begin{aligned}\int x^2\log x\,dx &= \frac{1}{3}x^3\log x - \int \frac{1}{3}x^3\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{9}x^3 \\ &= \frac{1}{9}x^3(3\log x - 1).\end{aligned}$$

(3) x^n $(n \geq 1)$ は n 回微分すると定数になることを利用する．

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x \, dx &= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) \, dx \\
&= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x \, dx \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \\
&= (-x^2 + 2) \cos x + 2x \sin x.
\end{aligned}$$

(4) e^{ax} は微分してもまた同じ関数が現れる．また，$\sin bx$, $\cos bx$ は 2 回微分すると同じ関数が現れるので，これらを利用する．

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{ax} \cos bx \, dx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} \int e^{ax} b \cos bx \, dx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I
\end{aligned}$$

となるので，これを I について求めると

$$I = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax}.$$

このようにして公式 3.3(17) は求められる．同様にして，$e^{ax} \sin bx$ についての公式 3.3(16) も求めることができる．

(5) $\cos x = (\sin x)'$ を利用して部分積分を行う．

$$\begin{aligned} I &= \int \cos x (\sin x)' \, dx \\ &= \cos x \sin x - \int (-\sin x) \sin x \, dx \\ &= \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \cos x \sin x + x - I. \end{aligned}$$

これより $I = \dfrac{\cos x \sin x + x}{2}$ を得る．$\cos x$ に関する半角の公式 $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ を用いて積分してもよい．

(6) (5) と同様に，

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^4 x \, dx \\ &= \int \cos^3 x (\sin x)' \, dx \\ &= \cos^3 x \sin x - \int 3 \cos^2 x (-\sin x) \sin x \, dx \\ &= \cos^3 x \sin x + 3 \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx \\ &= \cos^3 x \sin x + 3 \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \cos^3 x \sin x + 3 \int \cos^2 x \, dx - 3I. \end{aligned}$$

ここで，(5) の結果を利用して，

$$I = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x.$$

問 3.3　次の不定積分を求めよ．

(1) $x(x^2+1)^{10}$　(2) $x\sin(x^2+2)$　(3) $\cos x \sin^4 x$　(4) $\cos^5 x$

(5) $(\log x)^3$

例題 3.5

有理関数の不定積分は有理関数，対数関数，逆正接関数で表現される．

解　有理関数の部分分数分解を利用する．つまり，一般の有理関数は次の 2 種類の有理関数の線形和で表現できることを利用する．

(1) $\dfrac{1}{(x-a)^n}$,

(2) $\dfrac{ax+b}{(x^2+2px+q)^n} \quad (n \geq 1,\ p^2-q<0)$.

ゆえに，(1) の場合は次の公式を用いて求められる．

(1.1) $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log|x-a|$,

(1.2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} \qquad (n \neq 1)$.

(2) の場合はさらに次のように変形できる．

$$\frac{ax+b}{(x^2+2px+q)^n} = \frac{a(x+p)}{((x+p)^2+(q-p^2))^n} + \frac{-pa+b}{((x+p)^2+(q-p^2))^n}.$$

これより

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+2px+q)^n}\,dx = a\int \frac{t}{(t^2+c^2)^n}\,dt + (-pa+q)\int \frac{1}{(t^2+c^2)^n}\,dt.$$

ただし，$t=x+p$, $c=\sqrt{q-p^2}$ とおいた．ゆえに，第 1 項は

(2.1) $\displaystyle\int \frac{t}{t^2+c^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(t^2+c^2) \quad (n=1),$

(2.2) $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+c^2)^n}\,dx = -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(t^2+c^2)^{n-1}} \quad (n\neq 1).$

また，第 2 項は次のように漸化式を用いて求められる．

(2.3) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+c^2}\,dx = \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{t}{c} \quad (n=1),$

(2.4) $$\int \frac{1}{(t^2+c^2)^n}\,dx = \frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{2(n-1)}\frac{t}{(t^2+c^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{1}{(t^2+c^2)^{n-1}}\,dt\right\} \quad (n\neq 1).$$

問 3.4　次の有理関数を部分分数分解せよ．

(1) $\displaystyle\frac{1}{1+x^3}$　　(2) $\displaystyle\frac{1}{x^2(x-1)^2}$

例題 3.6

次の有理関数を部分分数に分解して不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\frac{1}{x^2+3x+2}$　　(2) $\displaystyle\frac{1}{x(x-1)(x-2)}$　　(3) $\displaystyle\frac{2x+1}{x^3+x^2}$

(4) $\displaystyle\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}$

解　(1) $\displaystyle\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$

このように分解できるはずである．右辺は $\displaystyle\frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)}$ であるから，分子の係数を比較することにより $A+B=0,\ 2A+B=1$ となり，

$A = 1,\, B = -1$ を得る．よって，

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx = \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|.$$

A, B を決定する際，両辺に $(x+1)$ を掛けると

$$\frac{1}{x+2} = A + \frac{B(x+1)}{x+2}$$

となるので，$x = -1$ と置けば，$A = 1$ を得る．つまり，左辺の分母の因数 $(x+1)$ を除いて他の変数に $x = -1$（$x+1=0$ の解）を代入して A が求められる．同様に考えると，$B = \dfrac{1}{(-2)+1} = -1$ も得る．このように計算してもよい．

(2)　$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

と分解できるはずだから，右辺を通分して係数比較で $A = \dfrac{1}{2},\, B = -1,$ $C = \dfrac{1}{2}$ を得る．これはまた，(1) で述べたように，

$$A = \frac{1}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{(1)(1-2)} = -1,\ C = \frac{1}{(2)(2-1)} = \frac{1}{2}$$

と計算してもよい．よって，

$$\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right|.$$

(3)　$$\frac{2x+1}{x^3+x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

と分解される．これも係数を比較することにより，$A = 1,\, B = 1,\, C = -1$ を得る．ゆえに

$$\int \frac{2x+1}{x^3+x^2}\,dx = \log\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{1}{x}.$$

解を代入して求める方法には注意が必要である．B を求めるには両辺に x^2 を掛けたと考えて $B = \dfrac{2 \cdot 0 + 1}{0 + 1} = 1$ と求めてよいが，A を求める際，両辺に x を掛けて $x = 0$ を代入することはできない．なぜなら，両辺の分母に因数 x がまだ残っているためである．この考え方で計算するには，両辺より，$\dfrac{B}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$ を取り除いて

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

と書き換えると，解の代入で計算できるようになる．しかし，両辺から高い次数の分数式を取り除く計算はそれなりに面倒なので，係数比較で決定するほうが楽かもしれない．ともかく，分母で一番高い次数をもつ分数式の係数は解の代入で簡単に計算できるので，それらを決定した後，係数比較を行うほうがよいだろう．

(4)
$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

と分解されて，係数比較により $A = -\dfrac{1}{2}$, $B = 1$, $C = \dfrac{1}{2}$, $D = -\dfrac{1}{2}$ を得る．C, D を求める際，両辺に x^2+1 を掛けて，解 $x = i$ を代入して決定してもよい．ともかく，これより，

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right\}.$$

ゆえに，不定積分は以下で与えられる．

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{4}\log\frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\tan^{-1} x.$$

問 3.5　次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1+x^3}$　(2) $\dfrac{1}{x^2(x-1)^2}$　(3) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$　(4) $\dfrac{3x-1}{x^3(x+1)}$

例題 3.7

次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $(2x+1)\sqrt{x+1}$　　(2) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$　　(3) $\dfrac{x^2}{x^6+1}$

解　(1) 変数変換 $t=\sqrt{x+1}$ を用いる．このとき，

$$x=t^2-1,\quad dx=2t\,dt$$

だから，

$$\begin{aligned}\int(2x+1)\sqrt{x+1}\,dx&=\int(2t^2-1)t(2t)dt\\&=\frac{4}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3\\&=\frac{2}{15}(6x+1)(x+1)\sqrt{x+1}.\end{aligned}$$

(2) 変数変換 $t=\sqrt{1-x}$ を用いる．このとき，

$$x=-t^2+1,\quad dx=-2t\,dt$$

だから

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx=\int\frac{-t^2+1}{t}(-2t)\,dt=\frac{2}{3}t^3-2t=-\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x}.$$

(3) $t=x^3$ とおくと，$dt=3x^2\,dx$ より

$$\int\frac{x^2}{x^6+1}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{1}{3}\tan^{-1}t=\frac{1}{3}\tan^{-1}x^3.$$

問 3.6　次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}}$　　(2) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$　　(3) $\dfrac{x^3}{1+x^8}$

例題 3.8

$f(x,y)$ が x,y に関して有理関数であるとき，関数

$$f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

において $a>0$ であるならば，この不定積分は有理関数の積分に書き換えられる．実際，変数変換

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x$$

によって不定積分は次で与えられ，被積分関数は有理関数である．

$$\int f\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \frac{\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c}{2\sqrt{a}t+b}\right)\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt.$$

解　$t-\sqrt{a}x=\sqrt{ax^2+bx+c}$ の両辺を2乗することによって，

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$$

が得られるが，これより

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x=t-\frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{2\sqrt{a}t+b}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c}{2\sqrt{a}t+b}$$

となり，また

$$dx=\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt$$

であるから，与えられた有理関数の積分を得る．

例題 3.9

次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\sqrt{x^2+bx+c}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+bx+c}}$ (3) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+bx+c}}$

解 (1) $t=\sqrt{x^2+bx+c}+x$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+bx+c}\,dx &= \int\frac{2(t^2+bt+c)^2}{(2t+b)^3}\,dt\\ &= \frac{1}{16}\int\frac{(s^2-\alpha)^2}{s^3}\,ds\\ &= \frac{1}{32}\left(s^2-\frac{\alpha^2}{s^2}-4\alpha\log|s|\right)\\ &= \frac{1}{4}(2x+b)\sqrt{x^2+bx+c}\\ &\qquad -\frac{1}{8}(b^2-4c)\log|2\sqrt{x^2+bx+c}+2x+b|\end{aligned}$$

を得る．ただし，

$$s=2t+b=2\sqrt{x^2+bx+c}+2x+b,\ \alpha=b^2-4c$$

である．

(2) 同様に $t=\sqrt{x^2+bx+c}+x$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+bx+c}}\,dx &= \int\frac{2}{2t+b}\,dt\\ &= \log|2t+b|\\ &= \log|2\sqrt{x^2+bx+c}+2x+b|.\end{aligned}$$

(3) これも再び，$t = \sqrt{x^2 + bx + c} + x$ とおくと，

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{2}{t^2 - c}\,dt$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{c}} \log\left|\dfrac{t-\sqrt{c}}{t+\sqrt{c}}\right| & (c > 0) \\ -\dfrac{2}{t} & (c = 0) \\ \dfrac{2}{\sqrt{|c|}} \tan^{-1} \dfrac{t}{\sqrt{|c|}} & (c < 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{c}} \log\left|\dfrac{\sqrt{x^2+bx+c}+x-\sqrt{c}}{\sqrt{x^2+bx+c}+x+\sqrt{c}}\right| & (c > 0) \\ -\dfrac{2}{\sqrt{x^2+bx+c}+x} & (c = 0) \\ \dfrac{2}{\sqrt{|c|}} \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{x^2+bx+c}+x}{\sqrt{|c|}} & (\ c < 0). \end{cases}$$

例題 3.10

$f(x,y)$ が x, y に関して有理関数であるとき，関数

$$f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

において

$$a<0, \quad ax^2+bx+c=-a(x-\alpha)(\beta-x), \quad \alpha<\beta$$

であるならば，この不定積分は有理関数の積分に書き換えられる．実際，変数変換

$$t=\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

によって不定積分は次で与えられ，被積分関数は有理関数である．

$$\int f\left(\frac{\beta t^2+\alpha}{t^2+1}, \frac{\sqrt{-a}(\beta-\alpha)t}{t^2+1}\right)\frac{2(\beta-\alpha)t}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

解　$x=\dfrac{\beta t^2+\alpha}{t^2+1}$ より，

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}(\beta-x)t=\frac{\sqrt{-a}(\beta-\alpha)t}{t^2+1}.$$

また，

$$dx=\frac{2(\beta-\alpha)t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

であるから，与えられた有理関数の不定積分を得る．

例題 3.11

$f(x,y)$ が x, y に関して有理関数であるとき，関数

$$f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \quad (ad-bc \neq 0)$$

の不定積分は有理関数の積分に書き換えられる．実際，変数変換

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

によって

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int f\left(\frac{-dt^n+b}{ct^n-a}, t\right) \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\, dt$$

となり，右辺の被積分関数は有理関数である．

解

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x = \frac{-dt^n+b}{ct^n-a}$$

より

$$dx = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\, dt$$

となって，右辺を得る．

例題 3.12

次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$　　　(2) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$

解　(1) 変数変換 $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ を用いると,

$$x=\frac{t^2+1}{t^2-1},\quad dx=-\frac{4t}{(t^2-1)^2}\,dt$$

より,

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx=-\int\frac{4t^2}{(t^2-1)^2}\,dt.$$

右辺の被積分関数の部分分数分解を求めると

$$-\frac{4t^2}{(t^2-1)^2}=-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{(t+1)^2}.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx&=\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\\&=\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+\sqrt{x^2-1}.\end{aligned}$$

(2) 変数変換 $t=\sqrt[6]{x}$ を用いると,

$$\sqrt{x}=t^3,\quad \sqrt[3]{x}=t^2,\quad dx=6t^5\,dt.$$

また,

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx&=6\int\frac{t^8}{t^2-1}\,dt\\&=6\int\left\{t^6+t^4+t^2+1+\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2(t+1)}\right\}dt\\&=\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+2t^3+6t+\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\\&=\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|.\end{aligned}$$

問 3.7　次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$　(2) $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

例題 3.13

$f(x,y)$ が x, y に関して有理関数であるとき，関数

$$f(\sin x, \cos x)$$

の不定積分は有理関数の積分に書き換えられる．実際，変数変換

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

によって

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となり，右辺の被積分関数は有理関数である．

解

$$t^2 = \tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}, \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}.$$

また，sin, cos に関する 2 倍角の公式より

$$\sin x = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

さらに,

$$dt = \frac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}\,dx, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

より，右辺を得る.

例題 3.14

次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　(2) $\dfrac{1}{1+\sin x+\cos x}$　(3) $\dfrac{1}{\cos^4 x}$

解　(1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx &= \int \frac{2}{(1+t)^2}dt \\ &= -\frac{2}{1+t} \\ &= -\frac{2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}.\end{aligned}$$

(2) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{1+t}\,dt \\ &= \log|1+t| \\ &= \log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|.\end{aligned}$$

(3) 被積分関数が $\sin^2 x$ や $\cos^2 x$ で表されているときは，$t = \tan x$ とお

くとよい．このときは

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

となるので，

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int (1+t^2)\,dt = t + \frac{1}{3}t^3 = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x.$$

問 3.8　次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1-\sin x}$　(2) $\dfrac{1}{\sin x}$　(3) $\dfrac{1}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$　$(ab > 0)$

例題 3.15

n 次の漸化式を導け．ただし，$n \geq 2$ である．

(1) $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+c^2)^n}\,dx$ とおき，次の漸化式を導け．

$$I_n = \frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{2n-2}\,\frac{x}{(x^2+c^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}\right\}.$$

(2) $I_n = \displaystyle\int \sin^n x\,dx$ とおき，次の漸化式を導け．

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

(3) $I_n = \displaystyle\int x^n \sin x\,dx$ とおき，次の漸化式を導け．

$$I_n = x^{n-1}(n \sin x - x\cos x) - n(n-1) I_{n-2}.$$

解　(1) $\left(\dfrac{1}{(x^2+c^2)^{n-1}}\right)' = -2(n-1)\dfrac{x}{(x^2+c^2)^n}$ だから，部分積分に

より

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+c^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+c^2)^n}\,dx$$
$$= \frac{x}{(x^2+c^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)c^2 I_n$$

を得る．これを I_n について求めて，問題の漸化式を得る．

(2) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ だから

$$I_n = I_{n-2} - \int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$$
$$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\int (\sin^{n-1} x)' \cos x\,dx$$
$$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\sin^{n-1} x \cos x - \frac{1}{n-1} I_n.$$

これを I_n について求めて，問題の漸化式を得る．
(3) 部分積分を 2 回行なう．

$$I_n = \int x^n(-\cos x)'\,dx$$
$$= -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$$
$$= -x^n \cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)\int x^{n-2}\sin x\,dx.$$

問 3.9　次の漸化式を導け．ただし，$n \geq 2$ である．

(1) $\displaystyle\int x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1} e^{-x}\,dx.$

(2) $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$

(3) $\displaystyle\int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\,dx.$

(4) $\displaystyle\int x^n \cos x\, dx = x^{n-1}(n\cos x + x\sin x) - n(n-1)\int x^{n-2}\cos x\, dx.$

(5) $\displaystyle\int (\log x)^n dx = x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1}\, dx.$

3.2　定積分

$f(x)$ を有限閉区間 $[a,b]$ 上で定義された有界関数とする．分割

$$\varDelta_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

において，$\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)$ $(\xi_i \in [x_{i-1}, x_i])$ を任意に選び，**リーマン和**を

$$R(\varDelta_n, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

と定義する．どのように分割 $\varDelta_n$ とそれに対応する ξ を選ぼうとも，分割の大きさ $|\varDelta_n| = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i - x_{i-1}|$ が 0 に収束するとき，リーマン和 $R(\Delta_n, \xi)$ が一定値に収束するならば，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で**積分可能**である呼ぶ．また，その収束先を (**定**) **積分**と呼び，次のように書き表す.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} R(\Delta_n, \xi).$$

このとき，特に，分点を $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$ $(i = 0,\ \cdots,\ n)$ とおき，$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ をこれらの区間の端点に取ることにより積分は次のように表現できる.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right).$$

定理 3.4　$f(x)$ が $[a,b]$ で連続あるいは単調（増加あるいは減少）ならば，$f(x)$ は $[a,b]$ で積分可能である．

定理 3.5　$f(x)$, $g(x)$ が $[a,b]$ で積分可能ならば，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

(2) $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \quad (\alpha \in \boldsymbol{R}).$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (a < c < b).$

定理 3.6　$f(x)$, $g(x)$ が $[a,b]$ で積分可能ならば，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle f(x) \le g(x) \implies \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

(2) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$

定理 3.7　$f(x)$, $g(x)$ が $[a,b]$ で積分可能ならば，次が成り立つ．

(1) 任意の x $(a < x < b)$ に対して

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

は $f(x)$ の原始関数である．つまり，$F'(x) = f(x)$.

(2) $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば,

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

定理 3.8　関数 $\varphi(x)$ は区間 $[\alpha, \beta]$ で C^1 級である．$\varphi([\alpha, \beta])$ 上で連続な関数 $f(x)$ に対して，次が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

ただし，$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ である.

定理 3.9　$f(x)$, $g(x)$ が区間 $[a, b]$ 上で C^1 級ならば，次が成り立つ.

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

定理 3.10　$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で非負な連続関数である．ある $x_0 \in [a, b]$ で $f(x_0) > 0$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$ である.

例題 3.16

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

解　(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k/n} = \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx = \log 4.$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$
$\displaystyle =[\tan^{-1}x]_0^1=\frac{\pi}{4}.$

問 3.10　次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{2n}k^3$　(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$　(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$

(4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}3^{\frac{k}{n}}$

例題 3.17

次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle \int_a^b(x-a)^7(b-x)^2\,dx$　(2) $\displaystyle \int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$

(3) $\displaystyle \int_1^2\frac{1}{x^3+x}\,dx$　(4) $\displaystyle \int_2^3\frac{4}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

解　(1)

$$\begin{aligned}\int_a^b(x-a)^7(b-x)^2\,dx&=\int_a^b\big((x-a)^9-2(b-a)(x-a)^8\\&\qquad+(b-a)^2(x-a)^7\big)\,dx\\&=\left[\frac{1}{10}(x-a)^{10}-\frac{2}{9}(b-a)(x-a)^9\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{8}(b-a)^2(x-a)^8\right]_a^b\\&=\frac{(b-a)^{10}}{360}.\end{aligned}$$

(2) $t=\sqrt{x+1}$ と変数変換すると

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)^2}{t} 2t\,dt = \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + 2t\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{15}(14\sqrt{2}-16).$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\,dx \\ &= \left[\log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log 5.\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{4}{(x-1)(x+1)^2} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1}$ だから,

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{4}{(x-1)(x+1)^2}\,dx &= \left[\log(x-1) + \frac{2}{x+1} - \log(x+1)\right]_2^3 \\ &= \log\frac{3}{2} - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

問 3.11　次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 (3x+1)^4\,dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^3}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^a (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$　(6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$

例題 3.18

次の関数を微分せよ．ただし，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ を用いてよい．

(1) $\int_x^0 f(t)\,dt$ (2) $\int_0^{x^2} f(t)\,dt$ (3) $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$

(4) $\int_0^{g(x)} f(t)\,dt$ （ただし， $g(x)$ は微分可能.）

解 (1) $\int_x^0 f(t)\,dt=[F(t)]_x^0=F(0)-F(x)$ だから，

$$\frac{d}{dx}\int_x^0 f(t)\,dt=-\frac{d}{dx}F(x)=-f(x).$$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt=\dfrac{d}{dx}F(x^2)=f(x^2)(x^2)'=2xf(x^2).$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)f(t)\,dt&=\frac{d}{dx}(xF(x))-\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)\,dt\\&=F(x)+xf(x)-xf(x)=F(x).\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{g(x)} f(t)\,dt=\dfrac{d}{dx}(F(g(x))-F(0))=f(g(x))g'(x).$

問 3.12 次を求めよ．ただし， $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ を用いてよい．

(1) $\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt.$

(2) $\dfrac{d^n}{dx^n}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n f(t)\,dt$ （ただし，n は自然数.）

(3) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt$ （ただし， $g_1(x)$, $g_2(x)$ は微分可能.）

問 3.13　次を証明せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx = \int_0^c f(c-x)\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$

(3) $f(x)$ が偶関数 $(f(-x)=f(x))$ ならば, $\displaystyle\int_{-c}^c f(x)dx = 2\int_0^c f(x)\,dx.$

(4) $f(x)$ が奇関数 $(f(-x)=-f(x))$ ならば, $\displaystyle\int_{-c}^c f(x)\,dx = 0.$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$

例題 3.19

次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$ （ただし, m, n は整数である.）

解　(1) $x=\sin t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ と置換すると,

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t, \quad dx = \cos t\,dt$$

だから,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(2) 部分積分を行なう．$(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ だから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx &= \left[x\sin^{-1} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 \ = \ \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

(3) 公式 $\sin mx \sin nx = \dfrac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}$ を用いる．
(i) $m \neq \pm n$ の場合は

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin mx \sin nx\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^\pi \ = \ 0.\end{aligned}$$

(ii) $m = n(\neq 0)$ の場合は

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2 mx\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2mx)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(iii) $m = -n(\neq 0)$ の場合は

$$\int_0^\pi \sin mx \sin(-m)x\,dx = -\int_0^\pi \sin^2 mx\,dx = -\frac{\pi}{2}.$$

問 3.14　次の定積分の値を求めよ．
(1) $\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx$ （ただし n, m は整数.）
(3) $\displaystyle\int_0^\pi \cos mx \sin nx\,dx$ （ただし，n, m は整数.）

例題 3.20

$n \geq 2$ とする．次を示せ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2}\dfrac{\pi}{2} & (n \geq 2,\ \text{偶数}) \\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3} & (n \geq 3,\ \text{奇数}). \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos x\,dx = \frac{1}{n+1}.$

(3) $\displaystyle I(n,m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos^m x\,dx$ $(m \geq 2)$ とおくと，

$$I(n,m) = I(n,m-2) - I(n+2,m-2)$$

である．

解　(1) $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおくと，部分積分により

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\cos x\sin^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin^{n-2} x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,dx \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

ゆえに，$I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ だから，次を得る．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2}I_0 & (n \geq 2,\ \text{偶数}) \\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3}I_1 & (n \geq 3,\ \text{奇数}). \end{cases}$$

$I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$ より求める値が得られる．
(2) 変数変換 $t = \sin x$ より，明らか．
(3) 次より明らか．

$$I(n,m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (1 - \sin^2 x) \cos^{m-2} x \, dx$$
$$= I(n, m-2) - I(n+2, m-2).$$

問 3.15　次の定積分の値を求めよ．
(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^3 x \, dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^5 x \, dx$

例題 3.21

(1)（**積分の第 1 平均値の定理**）関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続であり，非負（または非正）な関数 $g(x)$ も $[a,b]$ で連続であるとする．このとき，次を満足する $\xi \in (a,b)$ が存在する．

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b g(x) \, dx.$$

(2)（**積分の第 2 平均値の定理**）関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で単調かつ C^1 級であり，関数 $g(x)$ は $[a,b]$ で連続であるとする．このとき，次を満足する $\xi \in (a,b)$ が存在する．

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(a) \int_a^\xi g(x) \, dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

解　(1) $g(x)$ が定数関数 $g(x) = 0$ の場合は両辺 0 となって任意の $\xi \in (a,b)$ に対して正しい．そうでない場合は，$\displaystyle\int_a^b g(x) \, dx \neq 0$ だから，

$g(x)$ が非負であっても非正であっても

$$\min_{a\le x\le b} f(x) \le \frac{1}{\int_a^b g(x)\,dx}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \max_{a\le x\le b} f(x)$$

が成り立つ．ゆえに，中間値の定理より，

$$f(\xi) = \frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

を満足する $\xi \in (a,b)$ が存在する．

(2) $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$ とおく．このとき，部分積分により

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$

となるが，第1項は $f(b)G(b)$ である．$f(x)$ の単調性により，$f'(x)$ は非負あるいは非正になるので，第2項に第1平均値の定理が適用できて，

$$\int_a^b f'(x)G(x)\,dx = G(\xi)\int_a^b f'(x)\,dx = G(\xi)(f(b)-f(a))$$

となる $\xi \in (a,b)$ が存在する．ゆえに，

$$f(b)G(b) - G(\xi)(f(b)-f(a)) = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

例題 3.22

関数 $f(x)$ は $[a,b]$ で連続であり，関数 $g(x)$ は周期 $c>0$ をもつ連続関数である．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,dx = \frac{1}{c}\int_0^c g(x)\,dx\int_a^b f(x)\,dx.$$

解 $g(x)=0$ のときは，両辺 0 となって明らかである．$g(x)\neq 0$ のときは，まず，$g(x)$ が非負あるいは非正の場合に証明を与える．区間 $[a,b]$ の中に $\frac{c}{n}k$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ の形をした分割点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$$

をとる．すると，m はほぼ $\dfrac{n(b-a)}{c}$ であり，$x_i-x_{i-1}=\dfrac{c}{n}$ $(i=2,\ \cdots,\ m-1)$ である．また，

$$\int_a^b f(x)g(nx)\,dx=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(nx)\,dx$$

である．$k=2,\ \cdots,\ m-1$ のとき，ある整数 j に対して，$x_k=\dfrac{jc}{n}$，$x_{k-1}=\dfrac{(j-1)c}{n}$ の形をしているので

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(nx)\,dx=\int_{(j-1)c/n}^{jc/n} g(nx)\,dx=\frac{1}{n}\int_{(j-1)c}^{jc} g(x)\,dx=\frac{1}{n}\int_0^c g(x)\,dx$$

である．ゆえに，積分の第 1 平均値の定理より，$\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ が存在して，

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(nx)\,dx\\
&=\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(nx)\,dx\\
&=\sum_{k=2}^{m-1} f(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(nx)\,dx+f(\xi_1)\int_a^{x_1} g(nx)\,dx+f(\xi_m)\int_{x_{m-1}}^{b} g(nx)\,dx\\
&=\frac{1}{c}\,\frac{c}{n}\sum_{k=2}^{m-1} f(\xi_k)\int_0^c g(x)\,dx+\frac{1}{n}f(\xi_1)\int_{a^*}^{c} g(x)\,dx+\frac{1}{n}f(\xi_m)\int_0^{b^*} g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

ただし，$0 \le a^* \le c$, $0 \le b^* \le c$ である．ここで，n を無限大にもっていくと，第 2 項と第 3 項は 0 に収束し，第 1 項は求める極限値に収束する．

$g(x)$ が一般の場合は,

$$g^+(x) = \max\{g(x), 0\}, \quad g^-(x) = \min\{g(x), 0\}$$

と定義すると，これらは非負，非正になり，$g(x) = g^+(x) + g^-(x)$ であり，周期性も失わない．ゆえに,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)g(nx)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)g^+(nx)\,dx + \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)g^-(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{c}\int_a^b f(x)\,dx \int_0^c g^+(x)\,dx + \frac{1}{c}\int_a^b f(x)\,dx \int_0^c g^-(x)\,dx \\
&= \frac{1}{c}\int_a^b f(x)\,dx \int_0^c g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

問 3.16　次を示せ.

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx.$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)|\cos nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx.$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0.$

(4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sin nx \cos mx\,dx = \lim_{m\to\infty} \int_a^b \sin nx \cos mx\,dx = 0.$

3.3　広義積分

半開区間 $(a,b]$ 上で定義された関数 $f(x)$ が連続であるとする．$\displaystyle\lim_{y\to a+0}\int_y^b f(x)\,dx$ が定義可能なとき（$\pm\infty$ の場合も含めて），**広義積分** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は**定義可能**であるといい，それが有限値であるとき存在（**収束**）するという．その積分値をその収束値で定義する．つまり

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y\to a+0}\int_y^b f(x)\,dx.$$

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると，次のようにも書ける．

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - \lim_{x\to a+0} F(x).$$

この極限値が定義できないとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は**定義不能**（**発散**する）という．この定義より明らかなように，形式的に $f(a)$ の値が定義されていない場合でも，$f(a)$ の値を適当に定めて $f(x)$ が $[a,b]$ 上で連続関数であるように拡張できる場合は広義積分はこの拡張された連続関数の定積分に一致する．

半開区間 $[a,b)$ に対しても，端点 $x=b$ において同様に極限を考えることにより広義積分は定義される．開区間 (a,b) に対しては，両端で同様にそれぞれ極限を考えることにより広義積分が定義される．

$(-\infty,b]$ 上で定義された関数 $f(x)$ が連続であるとする．$\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\int_y^b f(x)\,dx$ が定義可能なとき（$\pm\infty$ の場合も含めて），広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ は定義可能であるといい，それが有限値であるとき存在（収

束）するという．その積分値をその収束値で定義する．つまり

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{y\to-\infty}\int_{y}^{b} f(x)\,dx.$$

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると，次のように書ける．

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = [F(x)]_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim_{y\to-\infty} F(y).$$

この極限値が定義できないとき，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ は定義不能（発散する）という．区間 $[a,\infty)$ に対しても，端点 ∞ において同様に極限を考えることにより広義積分は定義される．開区間 $(-\infty,\infty)$ に対しては，両端で同様にそれぞれ極限を考えることにより広義積分が定義される．

$a<c<b$ とする．$f(x)$ が点 $x=c$ において不連続であっても，部分区間 (a,c), (c,b) で連続であって，広義積分 $\displaystyle\int_{a}^{c} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{c}^{b} f(x)\,dx$ が定義可能で，またその和が定義できるならば，(a,b) 上の広義積分は次で定義される．

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx.$$

これを繰り返すことにより，有限個の点を除いて連続である関数にも広義積分が定義されうる．

広義積分の定義は極限操作を含むが，そのことに注意しさえすれば，変数変換の公式も部分積分の公式も定積分におけるものと同様に成り立つ．

定理 3.11　$f(x)$, $g(x)$ を区間 (a,b) 上の連続関数とする．$a=-\infty$ または $b=\infty$ であってもよい．このとき，次が成り立つ．

(1) $0 \le g(x) \le f(x)$ かつ $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ が存在すれば，$\displaystyle\int_{a}^{b} g(x)\,dx$ も存在する．

(2) $g(x) \leq f(x)$ かつ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が存在すれば，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ は定義可能である．

(3) $g(x) \leq f(x)$ かつ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\infty$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = -\infty$ である．

系 3.12 $f(x)$, $g(x)$ を区間 (a, b) 上の連続関数とする．$a = -\infty$ または $b = \infty$ であってもよい．このとき，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ も存在する．

(2) $g(x) \leq f(x)$ かつ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ が存在すれば，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は定義可能である．

(3) $g(x) \leq f(x)$ かつ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = \infty$ ならば，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \infty$ である．

例題 3.23

(1) 実数 α に対して $\displaystyle\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx$ は存在するかどうか調べよ．

(2) 同様に $\displaystyle\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx$ は存在するかどうか調べよ．

解 (1) $y > 1$ に対して

$$\int_1^y x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha} - 1) & (\alpha \neq 1) \\ \log y & (\alpha = 1). \end{cases}$$

ゆえに，y を ∞ にもっていき，次を得る．

$$\int_1^{\infty} x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \infty & (\alpha \leq 1) \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & (\alpha > 1). \end{cases}$$

(2) $0 < y < 1$ に対して

$$\int_y^1 x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(1 - y^{1-\alpha}) & (\alpha \neq 1) \\ -\log y & (\alpha = 1). \end{cases}$$

ゆえに，y を 0 に近づけて，次を得る．

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \infty & (1 \leq \alpha) \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & (\alpha < 1). \end{cases}$$

問 3.17　実数 α に対して $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{-\alpha}\,dx$ は存在するかどうか調べよ．

例題 3.24

次の広義積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$　(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

解　(1) 端点 $x = 1$ において被積分関数は定義されていないので，広義積分である．

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = [\log|x-1|]_0^1 = \lim_{x \to 1-0} \log(1-x) = -\infty.$$

(2) 端点 $x=2$ において被積分関数は定義されていない．

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \left[2\sqrt{x-2}\right]_2^3 = 2(1-\lim_{x\to 2+0}\sqrt{x-2}) = 2.$$

(3) 両端で被積分関数は定義されていない．$0<a<b<1$ とおく．変数変換 $x=\sin^2 t$, $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ により，$dx = 2\cos t\sin t\,dt$ だから

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \int_{\sin^{-1}\sqrt{a}}^{\sin^{-1}\sqrt{b}} 2\,dt = 2(\sin^{-1}\sqrt{b}-\sin^{-1}\sqrt{a}).$$

このとき，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\sin^{-1}\sqrt{a}=0$, $\displaystyle\lim_{b\to 1-0}\sin^{-1}\sqrt{b}=\frac{\pi}{2}$ だから，広義積分の値は π である．

(4) 被積分関数は $x=0$ で定義されていないので，広義積分は次のように 2 区間に分けて計算されなければならない．

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

ところが,

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_0^1 = -\lim_{x\to+0}\log x = \infty.$$

同様に $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx = -\infty$ を得るので，和が定義できない．ゆえに広義積分は定義できない．

(5) 積分区間が無限区間であるので，広義積分の定義に従って計算する．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\tan^{-1}x\right]_{-\infty}^{\infty}.$$

このとき，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2}$. 同様に，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ であるので，広義積分 π を得る．

問 3.18　次の広義積分が存在するかどうか判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{|x|}}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{2x}-1}{x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$　(5) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^n \log x}\,dx\ (n \geq 0)$

問 3.19　次の広義積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\log x}{x^n}\,dx\ (n \geq 2)$　(2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin x e^{-x}\,dx$

例題 3.25

$s > 0$ に対して，**ガンマ関数**は次で定義される．

$$\Gamma(s) = \int_{0}^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx.$$

$s > 0$ のとき右辺の広義積分が存在することを確かめよ．

解　被積分関数は非負であるので，積分が無限大になる場合も含めて次が成り立つ．

$$\int_{0}^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx = \int_{0}^{1} x^{s-1} e^{-x}\,dx + \int_{1}^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx.$$

ゆえに，右辺の2項とも有限であることを示せばよい．第1項に対しては $0 < x \leq 1$ に対して $e^x > 1$ だから

$$0 < x^{s-1} e^{-x} < x^{s-1}.$$

ゆえに，

$$\int_{0}^{1} x^{s-1} e^{-x}\,dx < \int_{0}^{1} x^{s-1}\,dx = \left[\frac{1}{s} x^s\right]_0^1 = \frac{1}{s}$$

を得る．また，第 2 項に対しては，

$$\lim_{x\to\infty} x^{s+1}e^{-x} = 0$$

だから，ある有限値 $M > 0$ が存在して，任意の $x \geq 1$ に対して $x^{s-1}e^{-x} \leq Mx^{-2}$ であることがわかる．ゆえに，

$$\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \leq M\int_1^\infty x^{-2}\,dx = M\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = M < \infty.$$

問 3.20　次を示せ.

(1) $\mathit{\Gamma}(1) = 1$, $\mathit{\Gamma}(s+1) = s\mathit{\Gamma}(s)$ $(s > 0)$.

(2) $\mathit{\Gamma}(n+1) = n!$ (ただし，n は自然数).

問 3.21　次を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_1^\infty x^n e^{-x}\,dx.$$

問 3.22　(1) 任意の実数 s に対して

$$I_s = \int_0^\infty (1+x)^s e^{-x}\,dx$$

は存在することを示せ.

(2) $I_s = 1 + sI_{s-1}$ が成り立つことを示せ.

(3) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$ が成り立つことを示せ.

例題 3.26

$s>0,\ t>0$ に対して，**ベータ関数**は次で定義される．

$$B(s,t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$$

$s>0,\ t>0$ のとき右辺の積分が存在することを確かめよ．

解　$s<1$ または $t<1$ のとき，広義積分になることに注意しよう．ともかく，被積分関数は非負だから，広義積分が ∞ にならないことを証明しよう．$0<c<1$ に対して

$$\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx=\int_0^c x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx+\int_c^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$$

である．第1項の被積分関数は $0<x\le c$ に対して

$$x^{s-1}(1-x)^{t-1}\le \max\{1,(1-c)^{t-1}\}x^{s-1}.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\int_0^c x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx &\le \max\{1,(1-c)^{t-1}\}\int_0^c x^{s-1}\,dx\\ &=\max\{1,(1-c)^{t-1}\}\frac{1}{s}c^s\end{aligned}$$

となり，有限である．また，第2項に関しても，$c<x<1$ に対して

$$x^{s-1}(1-x)^{t-1}\le \max\{1,c^{s-1}\}(1-x)^{t-1}$$

より，

$$\begin{aligned}\int_c^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx &\le \max\{1,c^{s-1}\}\int_c^1 (1-x)^{t-1}\,dx\\ &=\max\{1,c^{s-1}\}\frac{1}{t}(1-c)^t<\infty.\end{aligned}$$

問 3.23　次を示せ.

(1) $B(s,1)=\dfrac{1}{s}$.　(2) $B(s,t)=B(t,s)$.

(3) $B(s,t)=\dfrac{t-1}{s}B(s+1,t-1)$.

(4) $B(s,t)=\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$.　(5) $B(s,t)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(1+x)^{s+t}}\,dx$

(6) $B(s,t)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2s-1}\theta\cos^{2t-1}\theta\,d\theta$　(7) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

(8) $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

問 3.24　$s>0$, $t\geq 0$ に対して次を定義する.

$$I(s,t)=\int_0^1 x^s(-\log x)^t\,dx.$$

(1) 右辺の広義積分が存在することを示せ.

(2) $I(s,t)=\dfrac{t}{s+1}I(s,t-1)$ を示せ.

(3) $I(s,t)=\dfrac{\Gamma(t+1)}{(s+1)^{t+1}}$ を示せ.

(4) 自然数 n に対して，$I(n,n)=\dfrac{n!}{(n+1)^{n+1}}$ を示せ.

(5) $x^{-x}=e^{-x\log x}$ を利用して

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}$$

が成り立つであろうと予測し，その根拠を述べよ.

(6) 同様に，$\displaystyle\int_0^1 x^x\,dx$ を無限級数で表し，その根拠を述べよ.

問 3.25　次の関数は平均 μ，分散 σ^2 をもつ正規分布と呼ばれる．ただし，$-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$，$\sigma > 0$ である．

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

次を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$

問 3.26　$a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ $(n \geq 0)$ とおくとき，次を a_n で表せ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{1} (1-x^2)^n\,dx$

例題 3.27

(1) $f(x)$ は $(0,\infty)$ で連続である．さらに，

$$f(0)=\lim_{x\to+0}f(x),\quad f(\infty)=\lim_{x\to\infty}f(x)$$

が存在する．このとき，$a,b>0$ に対して次が成り立つ．

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=(f(0)-f(\infty))\log\frac{b}{a}$$

(2) 上の $f(\infty)=\lim_{x\to\infty}f(x)$ の存在条件を広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ の存在条件で置き換えると，

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\log\frac{b}{a}.$$

(3) $f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)$ の存在条件を広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx$ の存在条件で置き換えると，

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=-f(\infty)\log\frac{b}{a}.$$

解 (1) $0<a<b$ と仮定しても一般性を失わない．$0<m<M<\infty$

とおく．

$$\begin{aligned}\int_m^M \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx &= \int_m^M \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_m^M \frac{f(bx)}{x}\,dx\\ &= \int_{am}^{aM} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{bm}^{bM} \frac{f(x)}{x}\,dx\\ &= \int_{am}^{bm} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{aM}^{bM} \frac{f(x)}{x}\,dx\end{aligned}$$

であるから，積分の第1平均値の定理より，ある ξ_m $(am \leq \xi_m \leq bm)$ および ξ_M $(aM \leq \xi_M \leq bM)$ が存在して

$$\begin{aligned}\int_m^M \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx &= f(\xi_m)\int_{am}^{bm} \frac{1}{x}\,dx - f(\xi_M)\int_{aM}^{bM} \frac{1}{x}\,dx\\ &= (f(\xi_m) - f(\xi_M))\log\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

これより，$m \to +0,\ M \to \infty$ として，証明を得る．

(2) 置き換えられた仮定より

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx &= \lim_{m\to+0}\int_m^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx\\ &= \lim_{m\to+0}\int_{am}^{bm} \frac{f(x)}{x}\,dx\end{aligned}$$

となるので，(1) の証明と同様に得られる．

(3) (2) と同様である．

問 3.27　次の広義積分の値を求めよ．ただし，$0 < a < b$ である．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax - \tan^{-1} bx}{x}\, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\log x}\, dx$

第4章　偏微分法

4.1　2変数関数の基本事項

例題 4.1

次の式の表す xy 平面上の図形を描け.

(1) $x = t$, $y = t$, $0 \leq t < \infty$.

(2) $x = 2t$, $y = t$, $-\infty < t < \infty$.

(3) $x = t$, $y = \alpha t$, $0 < t < 1$. ただし, α は実定数とする.

解

(1) t を消去して $y = x$, $0 \leq x < \infty$ を得るのでその図形は図 4.1 のようになる.

(2) t を消去して $y = \dfrac{x}{2}$, $-\infty < x < \infty$ を得るのでその図形は図 4.2 のようになる.

(3) t を消去して $y = \alpha x$, $0 < x < 1$ を得るのでその図形は図 4.3 のようになる.

（グラフは $\alpha = -\dfrac{3}{2}$ としたものである.）

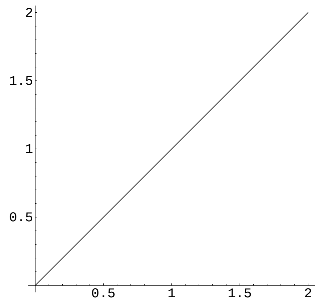

図 4.1: 例題 4.1 (1) の図形

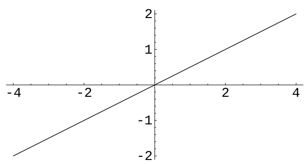

図 4.2: 例題 4.1 (2) の図形

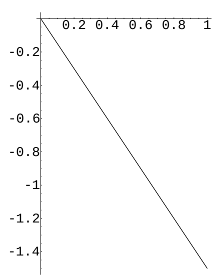

図 4.3: 例題 4.1 (3) の図形

問 4.1　次の式の表す xy 平面上の図形を描け.

(1) $x = t$, $y = t^2$, $0 \leq t \leq 1$.

(2) $x = t^2$, $y = 2t$, $-1 \leq t \leq 0$.

問 4.2　次の式の表す xy 平面上の図形を描け.

$$x = t\cos\frac{2\pi}{t}, \quad y = t\sin\frac{2\pi}{t}, \qquad 0 < t \leq 1.$$

例題 4.2

$f(x,\ y) = -x + 2y + 3$ とする.

(1) $f(0,\ 0)$ と $f(2,\ 2)$ を求めよ.

(2) $z = f(x,\ y)$ のグラフを描け.

解

(1) $f(0,\ 0) = 3$. $f(2,\ 2) = 5$.

(2) この関数のグラフは $x - 2y + z = 3$ で与えられる図形である. すなわち 3 点 $(0,\ 0,\ 3)$, $\left(0,\ -\dfrac{3}{2},\ 0\right)$, $(3,\ 0,\ 0)$ を通る平面である.

問 4.3　$f(x,\ y) = x^2 + y^2$ とする.

(1) $f(1,\ -1)$ と $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ を求めよ.

(2) $z = f(x,\ y)$ のグラフを描け.

問 4.4　次の関数 $z = f(x,\ y)$ のグラフを描け.

(1) $z = f(x,\ y) = x^2 - y^2$.

(2) $z = f(x,\ y) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 + y^2$.

例題 4.3

$$u(x,\ y) = x^2 - y^2, \qquad v(x,\ y) = 2xy$$

とし, $\varPhi(x,\ y) = (u(x,\ y),\ v(x,\ y))$ とする.

(1) $\varPhi(-1,\ 1)$ と $\varPhi(0,\ -2)$ を求めよ.

(2) 半直線 $y = \sqrt{3}x$, $x \geq 0$ の $\varPhi$ による像を求めよ.

(3) 原点を中心とする円の $\varPhi$ による像を求めよ.

解

(1) $\varPhi(-1,\ 1) = (0,\ -2)$. $\varPhi(0,\ -2) = (-4,\ 0)$.

(2) $y = \sqrt{3}t$, $x = t$, $t \geq 0$ であるから

$$u = u(t,\ \sqrt{3}t) = -2t^2, \quad v = v(t,\ \sqrt{3}t) = 2\sqrt{3}\ t^2$$

となり $v = -\sqrt{3}u$, $u \leq 0$ を得る.

(3) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

$$u = u(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = r^2\cos 2\theta, \quad v = v(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = r^2\sin 2\theta$$

となり $u^2 + v^2 = r^4$ を得る.

問 4.5

$$u(x,\ y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v(x,\ y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

とし，$\Phi(x,\ y) = (u(x,\ y),\ v(x,\ y))$ とする．

(1) $\Phi(1,\ 0)$ と $\Phi(1,\ 1)$ を求めよ．

(2) 線分 $y = x$，$0 < x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の Φ による像を求めよ．

(3) 半直線 $y = -\sqrt{3}x$，$-\infty < x \leq -\dfrac{1}{2}$ の Φ による像を求めよ．

(4) 半円 $x^2 + y^2 = 1$，$y \geq 0$ の Φ による像を求めよ．

(5) $x^2 + y^2 = 4$ の Φ による像を求めよ．

$\boldsymbol{R}^2$ の 2 点 P と Q のユークリッド距離を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ と表す．すなわち $\mathrm{P} = (p_x,\ p_y)$，$\mathrm{Q} = (q_x,\ q_y)$ とすれば

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q}) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$$

である．

定義 4.1　$\boldsymbol{R}^2$ の点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ が P に収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 N で $n > N$ なる任意の n について $d(\mathrm{P}_n,\ \mathrm{P}) < \varepsilon$ となるものが存在するときをいう．

例題 4.4

$\mathrm{P}_n = \left(\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right)$，$\mathrm{P}_0 = (0,\ 0)$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n > N$ を満たす，すべての n に対して $d(\mathrm{P}_n,\ \mathrm{P}_0) < \varepsilon$ となる N を求めよ．

解

$$d(\mathrm{P}_n,\ \mathrm{P}_0) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} < \varepsilon$$

より，$n > \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$ を得る．したがって，$N > \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$ を満たす自然数 N をとればよい．

問 4.6　点列 $\left\{\mathrm{P}_n = \left(\dfrac{\cos n\pi}{n},\ \dfrac{\sin n\pi}{n}\right)\right\}$ が $\mathrm{P}_0 = (0,\ 0)$ に収束することを示せ．

例題 4.5

$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ に対して

$$f(x,\ y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

とする．このとき，$\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$ が存在することを示せ．

解　$r > 0$，$0 \leq \theta < 2\pi$ に対して，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおく．

$$d((0,\ 0),\ (r\cos\theta,\ r\sin\theta)) = r$$

であるから，$(x,\ y) \to (0,\ 0)$ と $r \to 0$ は同値である．

$$|f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)| = \left|\frac{r^2\cos^2\theta r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2 + r^2\sin^2\theta}\right| = \left|r^2\cos^2\theta\sin^2\theta\right| < r^2$$

となるので，θ の値に関わらず $r \to 0$ とすれば $|f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)| \to 0$ となる．ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y) = 0$ を得る．

問 4.7　$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$，$(1,\ 1)$ に対して

$$f(x,\ y) = \frac{x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2}{x^2(x-1)^2+y^2(y-1)^2}$$

とする．このとき，$\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$ と $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(1,\ 1)} f(x,\ y)$ が存在することを示せ.

例題 4.6

$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ に対して

$$f(x,\ y) = \frac{x-y}{x+y}$$

とする．このとき，$\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$ が存在しないことを示せ.

解　原点へ異なる近づき方をしたときに異なる極限値をもつことを示す．α を定数とし，$y = \alpha x$ を考える．t をパラメータとすれば $x = t$，$y = \alpha t$ となる．$t \to 0$ とすれば，この直線に沿って原点に近づく．このとき，

$$f(t,\ \alpha t) = \frac{t-\alpha t}{t+\alpha t} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

となる．したがってこの直線に沿って原点に近づけば

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

となり，α の値によって極限値が変わる．すなわち $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$ は存在しない.

問 4.8　次の極限値が存在するかどうかを調べよ．

(1)

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} xy\log(x^2+y^2),$$

(2)

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

問 4.9　関数

$$f(x,\ y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,\ y)\neq(0,\ 0) \\ 0 & (x,\ y)=(0,\ 0) \end{cases}$$

が全平面で連続であることを示せ．

4.2　偏微分と全微分

定義 4.2　$f(x,\ y)$ は $(a,\ b)$ の近傍で定義されているとする．$f(x,\ y)$ が $(a,\ b)$ で x について偏微分可能であるとは，有限な極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,\ b)-f(a,\ b)}{h}$$

が存在するときをいい，この極限値を x に関する偏微分係数と呼び，$f_x(a,\ b)$ で表す．また，$f(x,\ y)$ が $(a,\ b)$ で y について偏微分可能であるとは，有限な極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a,\ b+h)-f(a,\ b)}{h}$$

が存在するときをいい，この極限値を y に関する偏微分係数と呼び，$f_y(a,\ b)$ で表す．

例題 4.7

次の関数が原点において偏微分可能かどうかを調べよ.

(1)
$$f(x,\ y) = \sqrt{xy}$$

(2)
$$f(x,\ y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

解

(1)
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,\ 0)-f(0,\ 0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$
となるので x について偏微分可能で $f_x(0,\ 0)=0$ となる.
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,\ h)-f(0,\ 0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$
となるので y について偏微分可能で $f_y(0,\ 0)=0$ となる.

(2)
$$\frac{f(h,\ 0)-f(0,\ 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h}$$
であるから
$$\lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h} = -1$$
となる. したがって x について偏微分可能でない. 同様にして
$$\frac{f(0,\ h)-f(0,\ 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h}$$
であるから y について偏微分可能でない.

問 4.10　次の関数の偏導関数を求めよ.

(1)
$$f(x,\ y) = x^3 + 2x^2y^3 + x^2y + xy^2 + y,$$

(2)
$$f(x.\ y) = x^y y^x,$$

(3)
$$f(x,\ y) = e^x \sin y.$$

定義 4.3　$f(x,\ y)$ は $(a,\ b)$ の近傍で定義されているとする．$f(x,\ y)$ が $(a,\ b)$ で $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ **方向微分可能**であるとは，有限な極限値

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\cos\theta,\ b + t\sin\theta) - f(a,\ b)}{t}$$

が存在するときをいう.

例題 4.8

関数
$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x,\ y) \neq (0,\ 0) \\ 0 & (x,\ y) = (0,\ 0) \end{cases}$$
は原点において，すべての方向に関して方向微分可能であることを示せ．また，原点における偏微分係数を求めよ.

解

$$f(x,\ y) = \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + y^2} = (x-y)\left(1 + \frac{xy}{x^2 + y^2}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)-f(0,\ 0)}{r} &= r(\cos\theta-\sin\theta)\left(1+\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{r}\\ &= (\cos\theta-\sin\theta)(1+\cos\theta\sin\theta)\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$df_{(0,\ 0)}(\cos\theta,\ \sin\theta)=(\cos\theta-\sin\theta)(1+\cos\theta\sin\theta)$$

を得る．さらに，

$$df_{(0,\ 0)}(\cos 0,\ \sin 0)=df_{(0,\ 0)}(\cos\pi,\ \sin\pi)=1$$

より

$$f_x(0,\ 0)=1$$

となり，

$$df_{(0,\ 0)}\left(\cos\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\pi}{2}\right)=df_{(0,\ 0)}\left(\cos\frac{3\pi}{2},\ \sin\frac{3\pi}{2}\right)=-1$$

より

$$f_y(0,\ 0)=-1$$

となる．

問 4.11　例題 4.8 の関数 $f(x,\ y)$ の偏導関数を求めよ．さらにその連続性を調べよ．

定義 4.4　$f(x,\ y)$ は $(a,\ b)$ の近傍で定義されているとする．$f(x,\ y)$ が $(a,\ b)$ で全微分可能であるとは，適当な A と B をとり

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)=Ah+Bk+\varepsilon\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\lim_{(h,\ k)\to(0,\ 0)}\varepsilon=0$$

と表せるときをいう．

全微分可能であるとき，$f_x(a,\ b) = A$ と $f_y(a,\ b) = B$ となるので

$$f_x(a,\ b)dx + f_y(a,\ b)dy$$

を f の $(a,\ b)$ における全微分と呼び，df で表す．

例題 4.9

関数

$$f(x,\ y) = x^2 + y^2$$

は全平面で全微分可能であることを示せ．

解　$(x,\ y) = (a,\ b)$ で全微分可能であることを示す．

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b) - 2ah - 2bk}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \frac{(a+h)^2 + (b+k)^2 - a^2 - b^2 - 2ah - 2bk}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \sqrt{h^2+k^2} \to 0 \qquad ((h,\ k) \to (0,\ 0))
\end{aligned}$$

となるので全微分可能である．

問 4.12　例題 4.8 の関数 $f(x,\ y)$ は原点で全微分可能でないことを示せ．

問 4.13　$f(x,\ y)$ が $(a,\ b)$ で全微分可能であるとき，$(a,\ b)$ における方向微分は

$$df_{(a,\ b)}(\cos\theta,\ \sin\theta) = f_x(a,\ b)\cos\theta + f_y(a,\ b)\sin\theta$$

となることを示せ．

問 4.14　次の関数が全微分可能のときに，その全微分を求めよ．

(1)
$$f(x,\ y) = \log(1 + x^2 + y^2),$$

(2)
$$f(x,\ y) = x^2 e^x \cos y.$$

定理 4.5　（**合成関数の微分**）$z = f(x,\ y)$ は領域 D で全微分可能とする．区間 I で定義された微分可能な関数 $x = x(t)$ と $y = y(t)$ は $(x(t),\ y(t) \in D$ $(t \in I)$ を満たしているとする．このとき，合成関数 $f(x(t),\ y(t))$ は I 上で微分可能であり，

$$\frac{dz}{dt} = f_x(x(t),\ y(t))x'(t) + f_y(x(t),\ y(t))y'(t)$$

を満たす．

例題 4.10

$f(x,\ y)$ を C^1 級関数とする．$(a,\ b)$ における方向微分係数を合成関数の微分公式により求めよ．

解　$x(t) = a + t\cos\theta$，$y(t) = b + t\sin\theta$ とし，$z(t) = f(x(t),\ y(t))$ とおく．これより

$$\begin{aligned} df_{(0,\ 0)}(\cos\theta,\ \sin\theta) &= \lim_{t\to 0}\frac{z(t) - z(0)}{t} \\ &= f_x(a,\ b)\frac{dx}{dt} + f_y(a,\ b)\frac{dy}{dt} \\ &= f_x(a,\ b)\cos\theta + f_y(a,\ b)\sin\theta. \end{aligned}$$

例題 4.11

$f(x,\ y) = e^{xy}$ とし，$x = \log\sqrt{u^2+v^2}$，$y = \tan^{-1}\dfrac{v}{u}$ とする．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ を求めよ．

解　$f_x = ye^{xy}$，$f_y = xe^{xy}$ である．さらに

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{u}{u^2+v^2} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{v}{u^2+v^2}$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{v}{u^2+v^2} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u}{u^2+v^2}$$

であるから，合成関数の微分公式により

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= ye^{xy}\frac{u}{u^2+v^2} - xe^{xy}\frac{v}{u^2+v^2}\\ &= \frac{u\tan^{-1}\dfrac{v}{u} - v\log\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^2}\ e^{\log\sqrt{u^2+v^2}\tan^{-1}\frac{v}{u}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v} &= ye^{xy}\frac{v}{u^2+v^2} + xe^{xy}\frac{u}{u^2+v^2}\\ &= \frac{v\tan^{-1}\dfrac{v}{u} + u\log\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^2}\ e^{\log\sqrt{u^2+v^2}\tan^{-1}\frac{v}{u}}\end{aligned}$$

を得る．

例題 4.12

次の変換のヤコビ行列とヤコビアンを求めよ．

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta.$$

解

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

問 4.15 次の変換のヤコビ行列とヤコビアンを求めよ．ただし，a，b，c，d は定数とする．

(1)

$$x = au + bv \qquad y = cu + dv,$$

(2)

$$x = u\cos a - v\sin a \qquad y = u\sin a + v\cos a,$$

(3)

$$x = uv \qquad y = u - uv.$$

定理 4.6 $(u,\ v) = (f(x,\ y),\ g(x,\ y))$ を U を定義域とする C^1 級関数とする．U の点 $(x_0,\ y_0)$ でヤコビアンが 0 でないとする．このとき $(x_0,\ y_0)$ の適当な近傍 V が $(u_0,\ v_0) = (f(x_0,\ y_0),\ g(x_0,\ y_0))$ のある近傍 W の上に 1 対 1 に写像される．したがって W 上で $u = f(x,\ y)$ と $v = g(x,\ y)$ は逆に解ける．さらに，その逆写像は W 上で C^1 級となる．

例題 4.13

$(u,\ v) = \Phi(x,\ y) = (x+y,\ xy)$ とする．

(1) Φ のヤコビアンが 0 となる $(x,\ y)$ の集合を求めよ．

(2) (1) で求めた集合の Φ による像を求めよ．

(3) $(x,\ y)$ が全平面を動くときの $(u,\ v)$ 平面上の Φ による像を求めよ．

(4) (3) で求めた集合の境界が (2) で求めた集合であることを確認せよ．

(5) (2) で求めた集合上の点 $(u_0,\ v_0)$ に Φ によって写る xy 平面上の点を求めよ．

(6) (3) で求めた集合の内点 $(u_0,\ v_0)$ に Φ によって写る xy 平面上の点を求めよ．

(7) $(u_0,\ v_0)$ を (3) で求めた集合の内点とする．Φ の逆写像が存在する近傍を求めよ．また，その逆写像を求めよ．

解

(1)

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = x - y = 0$$

であるから，求める図形は直線 $y = x$ である．

(2)

$$(u,\ v) = \Phi(x,\ x) = (2x,\ x^2)$$

であるから，求める図形は曲線 $v = \dfrac{u^2}{4}$ である．

(3) u, v に対して $u = x + y$, $v = xy$ が実数解 x と y が存在する範囲を求めればよい．$y = u - x$ であるから $v = x(u - x)$ が実数解をもつ条件は $u^2 - 4v \geq 0$ である．

(4) (2) と (3) より確かめられる．

(5) x は $v_0 = x(u_0 - x)$ の解であるから，$u^2 - 4v = 0$ のときは重解となり，ただひとつの解 $x = \dfrac{u_0}{2}$ となる．したがって $\left(\dfrac{u_0}{2},\ \dfrac{u_0}{2}\right)$ である．

(6) (5) と同様にして，今度は $u^2 - 4v > 0$ であるから，

$$\left(\frac{u_0 \pm \sqrt{u_0^2 - 4v_0}}{2},\ \frac{u_0 \mp \sqrt{u_0^2 - 4v_0}}{2}\right)$$

（複合同順）である．

(7) $(u_0,\ v_0)$ と放物線 $v = \dfrac{u^2}{4}$ との距離を R とする．$0 < r < R$ なる r を半径とし，中心 $(u_0,\ v_0)$ の開円板を近傍としてとればよい．逆写像は (6) より

$$\varPhi^{-1}(u,\ v) = \left(\frac{u_0 + \sqrt{u_0^2 - 4v_0}}{2},\ \frac{u_0 - \sqrt{u_0^2 - 4v_0}}{2}\right)$$

または

$$\varPhi^{-1}(u,\ v) = \left(\frac{u_0 - \sqrt{u_0^2 - 4v_0}}{2},\ \frac{u_0 + \sqrt{u_0^2 - 4v_0}}{2}\right)$$

となる．

問 4.16　$(u,\ v) = \Phi(x,\ y) = (y - xy,\ xy)$ とする.

(1) Φ のヤコビアンが 0 となる $(x,\ y)$ の集合を求めよ.

(2) (1) で求めた集合の Φ による像を求めよ.

(3) $(x,\ y)$ が全平面を動くときの $(u,\ v)$ 平面上の Φ による像を求めよ.

(4) (3) で求めた集合の内点 $(u_0,\ v_0)$ に Φ によって写る xy 平面上の点を求めよ.

(5) $(u_0,\ v_0)$ を (3) で求めた集合の内点とする. Φ の逆写像が存在する近傍を求めよ. また, その逆写像を求めよ.

例題 4.14

$$f(x,\ y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,\ y) \neq (0,\ 0) \\ 0 & (x,\ y) = (0,\ 0) \end{cases}$$

とする. このとき $f_x(0,\ y)$, $f_y(x,\ 0)$, $f_x(0,\ 0)$, $f_y(0,\ 0)$, $f_{xy}(0,\ 0)$, $f_{yx}(0,\ 0)$ を求めよ.

解　$y \neq 0$ とすると

$$f_x(0,\ y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,\ y) - f(0,\ y)}{x} = \lim_{x \to 0} y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y$$

となり, $y = 0$ のときは

$$f_x(0,\ 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,\ y) - f(0,\ 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

となる. したがって,

$$f_{xy}(0,\ 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f_x(0,\ y) - f_x(0,\ 0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{-y - 0}{y} = -1$$

を得る．さらに $x \neq 0$ とすると

$$f_y(x,\ 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x,\ y) - f(x,\ 0)}{x} = \lim_{y \to 0} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x$$

となり，$x = 0$ のときは

$$f_y(0,\ 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x,\ y) - f(0,\ 0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

となる．したがって，

$$f_{yx}(0,\ 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f_y(x,\ 0) - f_y(0,\ 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = 1$$

を得る．

問 4.17　次の関数 f について f_x，f_y，f_{xx}，f_{yy}，f_{xy}，f_{yx} を求めよ．

(1)

$$f(x,\ y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

(2)

$$f(x,\ y) = e^{xy},$$

(3)

$$f(x,\ y) = \sin(x^2 + y^2).$$

問 4.18　次の関数 f について $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(1)

$$f(x,\ y) = \log(x^2 + y^2),$$

(2)

$$f(x,\ y) = e^x(x \cos y - y \sin y).$$

4.3　偏微分の応用

例題 4.15

$f(x,\ y) = e^x \sin y$ のマクローリン展開の 2 次の項まで求めよ.

解

$$f_x(x,\ y) = e^x \sin y \qquad f_y(x,\ y) = e^x \cos y$$

$$f_{xx}(x,\ y) = e^x \sin y \qquad f_{yy}(x,\ y) = -e^x \sin y$$

$$f_{xy}(x,\ y) = f_{yx}(x,\ y) = e^x \cos y$$

であるから

$$\begin{aligned} f(x,\ y) &= f(0,\ 0) + f_x(0,\ 0)x + f_y(0,\ 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2}\{f_{xx}(0,\ 0)x^2 + 2f_{xy}(0,\ 0)xy + f_{yy}(0,\ 0)y^2\} + \cdots \\ &= y + xy + \cdots \end{aligned}$$

となる.

問 4.19　次の関数 $f(x,\ y)$ の $(a,\ b)$ を中心とするテイラー級数を求めよ.

(1)

$$f(x,\ y) = 2x^2 + xy - 3y^2 - 2x + 5y + 1,$$

(2)

$$f(x,\ y) = e^{x+y}.$$

定理 4.7　（**陰関数定理**）$f(x,\ y)$ を $(a,\ b)$ の近傍で定義された C^1 級関数とし，$f(a,\ b)=0$ かつ $f_y(a,\ b)\neq 0$ を満足するとする．このとき，a の適当な近傍 I で定義された x の C^1 級関数 $y=\varphi(x)$ で次を満たすものがただ 1 つ存在する．

(1) $b=\varphi(a)$,

(2) $f(x,\ \varphi(x))=0 \qquad (x\in I)$,

(3) $\varphi'(x)=-\dfrac{f_x(x,\ \varphi(x))}{f_y(x,\ \varphi(x))}$.

例題 4.16

陰関数方程式

$$x^3+y^3-3xy=0$$

で与えられた曲線上で接線が引ける点を求め，さらにその接線の方程式を求めよ．

解　$f(x,\ y)=x^3+y^3-3xy$ とおく．

$$f_x=3x^2-3y$$
$$f_y=3y^2-3x$$

である．$f_x=0$ かつ $f_y=0$ より $x=y^2=x^4$ となる．すなわち $(x,\ y)=(0,\ 0)$ または $(1,\ 1)$ である．$(0,\ 0)$ は曲線上の点であるが，$(1,\ 1)$ は曲線上の点でない．$(a,\ b)$ を曲線上の点とすると $(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ で接線をもつ．$f_y(a,\ b)\neq 0$ とすると y を x の関数とみたときに

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{a^2-b}{b^2-a}$$

となるので，$(a,\ b)$ の接線の式は

$$y-b=-\frac{a^2-b}{b^2-a}(x-a),$$

すなわち，

$$(a^2-b)x+(b^2-a)y=ab$$

を得る．$f_x(a,\ b)\neq 0$ のときも同じ式を得る．

問 4.20　次の陰関数方程式において y を x の関数とみて $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1)
$$x^3y^3+y-x=0,$$

(2)
$$x^y-y^x=0.$$

定義 4.8　$f(x,\ y)$ を $(a,\ b)$ の近傍で定義された C^1 級関数とする．$(a,\ b)$ が f の**停留点**であるとは $f_x(a,\ b)=f_y(a,\ b)=0$ が成り立つときをいう．

定理 4.9　$f(x,\ y)$ を $(a,\ b)$ の近傍で定義された C^1 級関数とする．f が $(a,\ b)$ で広義の極値をとるならば，それは停留点である．

定理 4.10　$f(x,\ y)$ を $(a,\ b)$ の近傍で定義された C^2 級関数とする．$(a,\ b)$ は f の停留点とする．また

$$H(a,\ b)=f_{xx}(a,\ b)f_{yy}(a,\ b)-\{f_{xy}(a,\ b)\}^2$$

と定義する．このとき，

(1) $H(a,\ b)>0$ ならば f は $(a,\ b)$ で極値をとり，さらに $f_{xx}(a,\ b)>0$ ならば，それは極小値であり，$f_{xx}(a,\ b)<0$ ならば，それは極大値となり，また

(2) $H(a,\ b) < 0$ ならば f は $(a,\ b)$ で極値をとらない．

例題 4.17

問 4.4 (1) と (2) の関数の停留点，極大点，極小点，極値を求めよ．

解

(1) $f_x = 2x$，$f_y = -2y$ であるから，停留点は $(0,\ 0)$ である．

$f_{xx} = 2$，$f_{yy} = -2$，$f_{xy} = 0$ であるから，

$$H(0,\ 0) = f_{xx}(0,\ 0)f_{yy}(0,\ 0) - \{f_{xy}(0,\ 0)\}^2 = -4 < 0$$

となり f は極値を持たない．

(2) $f_x = x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$，$f_y = 2y$ であるから，停留点は $(0,\ 0)$，$(-1, 0)$，$(2,\ 0)$ である．

$f_{xx} = 3x^2 - 2x - 2$，$f_{yy} = 2$，$f_{xy} = 0$ である．

$$H(0,\ 0) = f_{xx}(0,\ 0)f_{yy}(0,\ 0) - \{f_{xy}(0,\ 0)\}^2 = -4 < 0$$

であるから $(0,\ 0)$ では極値をとらない．

$$H(-1,\ 0) = f_{xx}(-1,\ 0)f_{yy}(-1,\ 0) - \{f_{xy}(-1,\ 0)\}^2 = 3 \cdot 2 - 0 > 0$$

であり，さらに $f_{xx}(-1,\ 0) = 3 > 0$ であるから，$(-1,\ 0)$ で極小値 $f(-1,\ 0) = -\dfrac{5}{12}$ をとる．

$$H(2,\ 0) = f_{xx}(2,\ 0)f_{yy}(2,\ 0) - \{f_{xy}(2,\ 0)\}^2 = 6 \cdot 2 - 0 > 0$$

であり，さらに $f_{xx}(2,\ 0) = 6 > 0$ であるから，$(2,\ 0)$ で極小値 $f(2,\ 0) = -\dfrac{8}{3}$ をとる．

問 4.21　次の関数の極値を求めよ．

(1)
$$f(x,\ y) = x^3 + y^3 - 3xy,$$

(2)
$$f(x,\ y) = \frac{x^2 + y}{1 + y^2},$$

(3)
$$f(x,\ y) = (x + y)e^{-x^2 - y^2}.$$

例題 4.18

直六面体の辺の長さの和が一定であるとき，その体積が最大なものを求めよ．

解　辺の長さの和を $4S$ とする．1 つの頂点からでる辺の長さを x，y，z とする．このとき，$x+y+z = S$ となる．ただし $0 < x < S$，$0 < y < S$ である．したがって，その体積を $f(x,\ y)$ とすると

$$f(x,\ y) = xy(S - x - y)$$

となる．$f_x = y(S - x - y) - xy$，$f_y = x(S - x - y) - xy$ であるから，$f_x = 0$ と $f_y = 0$ より $x = y = \dfrac{S}{3}$ を得る．$f_{xx} = -2y$，$f_{yy} = -2x$，$f_{xy} = S - 2(x + y)$ であるから

$$\begin{aligned} H\left(\frac{S}{3},\ \frac{S}{3}\right) &= f_{xx}\left(\frac{S}{3},\ \frac{S}{3}\right) f_{yy}\left(\frac{S}{3},\ \frac{S}{3}\right) - \left\{f_{xy}\left(\frac{S}{3},\ \frac{S}{3}\right)\right\}^2 \\ &= \left(-\frac{2}{3}S\right)^2 - \left(-\frac{S}{3}\right)^2 > \frac{S}{3} \end{aligned}$$

となる．さらに $f_{xx}\left(\dfrac{S}{3},\ \dfrac{S}{3}\right) < 0$ であるから $\left(\dfrac{S}{3},\ \dfrac{S}{3}\right)$ で極大値をとる．いま $f(S,\ y) = f(0,\ y) = f(x,\ S) = f(x,\ 0) = 0$ であるから，これが最大値でもある．したがって，体積が最大となるものは立方体である．

問 4.22　a を正定数とし，x，y，z を非負変数とし，$x + 2y + 3z = a$ を満たすとする．このとき，x^3y^2z の最大値を求めよ．

問 4.23　$f(x,\ y) = 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2$ とする．$(x,\ y)$ が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすときの $f(x,\ y)$ の極値を求めよ．

定理 4.11　**（ラグランジュの未定乗数法）**$f(x,\ y)$ と $g(x,\ y)$ は領域 D で定義された C^1 級関数とする．$(x,\ y)$ が $g(x,\ y) = 0$ を満足しながら変動するときに $f(x,\ y)$ が広義の極値をとるとする．このとき

$$\Phi(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y) + \lambda g(x,\ y)$$

とおけば，$\Phi_x(x,\ y,\ \lambda_0) = \Phi_y(x,\ y,\ \lambda_0)$ を満たす λ_0 が存在する．

例題 4.19

$f(x,\ y) = x^2 + y^2$ とする．$(x,\ y)$ が $x^2 + xy + y^2 = 1$ を満たすときの $f(x,\ y)$ の極値を求めよ．

解　$g(x,\ y) = x^2+xy+y^2-1$ とおき，$\Phi(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y)-\lambda g(x,\ y)$ とする．

$$\Phi_x(x,\ y,\ \lambda) = 2x - \lambda(2x + y) = 0 \qquad \Phi_y(x,\ y,\ \lambda) = 2y - \lambda(x + 2y) = 0$$

$$g(x,\ y) = 0$$

を解いて，$(x,\ y) = (1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$ かつ $\lambda = 2$ または $(x,\ y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ かつ $\lambda = \dfrac{2}{3}$ を得る．これらの $(x,\ y)$ は極値の候補である．ここで $g(x,\ y) = 0$ は楕円を表し，$f(x,\ y)$ は原点から $(x,\ y)$ への距離の 2 乗を表している．すなわち題意は与えられた楕円上の点までの原点からの距離の 2 乗の極値を求めることである．したがって極値は存在して，$(x,\ y) = (1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$ で極大値 2 を，$(x,\ y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ で極小値 $\dfrac{2}{3}$ をとる．

問 4.24　$f(x,\ y) = x^2 + y^2$ とする．$(x,\ y)$ が $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ を満たすときの $f(x,\ y)$ の極値を求めよ．

第5章　重積分法

5.1　重積分と累次積分

定義 5.1　関数 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数で，

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x),\ x \in [a,b]$$

を満たしているとする．このとき，

$$D = \{(x,y) \,|\, a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

と表される有界閉領域を**縦線集合**という．また，閉区間 $[c,d]$ 上で定義された連続関数 $\psi_1(y)$，$\psi_2(y)$ で

$$\psi_1(y) \leq \psi_2(y),\ y \in [c,d]$$

を満たしているものを用いて，

$$D = \{(x,y) \,|\, c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

と表される有界閉領域を**横線集合**という．

例題 5.1

3 直線 $y=0$，$x=1$，$y=\dfrac{\pi}{2}x$ が囲む三角形 D は，縦線集合であり，横線集合でもある．

解

$$D=\left\{(x,y)\;\middle|\;0\le x\le 1,\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}x\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\;\middle|\;0\le y\le \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{\pi}y\le x\le 1\right\}.$$

問 5.1　$D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$ は縦線集合，横線集合であることを確かめよ．

定理 5.2　(**累次積分**)
(1) 縦線集合 $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ の内部で有界かつ連続な関数 $f(x,y)$ に対して，次が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy\right)dx.$$

(2) 横線集合 $D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$ の内部で有界かつ連続な関数 $f(x,y)$ に対して，次が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,dx\right)dy.$$

なお，累次積分を

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy,\qquad \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,dx$$

と表すこともある．

例題 5.2

D を3直線 $y=0$，$x=1$，$y=\dfrac{\pi}{2}x$ が囲む三角形とし，次の重積分の値を求めよ．

$$I=\iint_D\cos\frac{y}{x}\,dx\,dy$$

解　例題 5.1 により,

$$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}x\right\}$$

である．したがって，累次積分（定理 5.2）を適用する．

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}x} \cos\frac{y}{x}\, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[x \sin\frac{y}{x} \right]_0^{\frac{\pi}{2}x} dx \\ &= \int_0^1 x\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

コメント：被積分関数 $\cos\dfrac{y}{x}$ は，原点 $(0, 0)$ では定義できないが D の内部で有界な連続関数である．したがって，原点は無視して上のように計算すればよい．また，$\cos\dfrac{y}{x}$ の x に関する原始関数は求まらないので，x に関して積分し，次に y に関して積分する順序では，積分値を求めることはできない．

問 5.2　次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\, dx\, dy \quad (D : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1)$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{x-y}\, dx\, dy \quad (D : 0 \leq y \leq x \leq 1)$

(3) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\, dx\, dy \quad (D : x^2 + y^2 \leq x)$

問 5.3　次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dx\,dy \quad (D: 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2})$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy \quad \left(D: 0 \leq x,\, 0 \leq y,\, x+y \leq \frac{\pi}{2}\right)$

(3) $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy \quad (D: 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x)$

(4) $\displaystyle\iint_D x^2 y^2\,dx\,dy \quad (D: |x|+|y| \leq 1)$

例題 5.3

次を示せ.

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)\,dx.$$

（積分の順序変更）

解　左辺 $= \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$，$D = \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$ である．ところで，$D = \{(x,y)\,|\,0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1\}$ でもあるから，右辺 $= \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ である．

問 5.4　次の累次積分の積分順序を変えよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_0^{e^x} f(x,y)\,dy$

(2) $\displaystyle\int_0^a dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,dy \quad (0 < \alpha < \beta)$

(3) $\displaystyle\int_a^{2a} dy \int_{y-a}^{y+a} f(x,y)\,dx \quad (a > 0)$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{2+x} f(x,y)\,dy$

5.2 重積分の変数変換

例題 5.4

xy 平面の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ で張られる平行四辺形を D，すなわち，

$$D = \{s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \,|\, 0 \leq s,\ t \leq 1\}$$

とするとき，D の面積 $|D|$ は

$$|D| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right|$$

で与えられる．

解　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の間の角を θ $(0 < \theta < \pi)$ とする．すると，

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

であることに注意する．よって，

$$
\begin{aligned}
|D| &= \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right)^2} \\
&= \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2} \\
&= \sqrt{a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1a_2b_1b_2} \\
&= |a_1b_2-a_2b_1|.
\end{aligned}
$$

問 5.5 k，$h>0$，

$$
A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
$$

とする．xy 平面で，$(0,0)$，(ak,ck)，$(ak+bh,ck+dh)$，(bh,dh) を頂点とする平行四辺形 D の面積は

$$
|D| = |\det A|\,kh
$$

で与えられることを示せ．

例題 5.5

uv 平面から xy 平面への 1 次変換 $x = au + bv$，$y = cu + dv$ を考える．ここで，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = ad - bc \neq 0$$

とする．uv 平面で，$(0,0)$，$(k,0)$，(k,h)，$(0,h)$ $(k,\ h > 0)$ を頂点とする長方形領域 E は，この 1 次変換により，$(0,0)$，(ak,ck)，$(ak+bh, ck+dh)$，(bh,dh) を頂点とする平行四辺形 D に 1 対 1 にうつされ，

$$\iint_D dx\,dy = \iint_E \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

が成り立つ．　　　　**（1 次変換）**

解　問 5.5 により

$$\iint_D dx\,dy = |D| = |ad-bc|kh$$

である．また，

$$\begin{aligned}\iint_E \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv &= \iint_E |ad-bc| du\,dv \\ &= |ad-bc| \iint_E du\,dv \\ &= |ad-bc|kh\end{aligned}$$

である．

定理 5.3　(**変数変換**）$E = \{(u,v)\,|\,a \leq u \leq b,\ c \leq v \leq c\}$ は uv 平面上の長方形領域である．$x = \varphi(u,v)$，$y = \psi(u,v))$ は E を含む領域で定義

された C^1 級関数で，写像 $(u, v) \to (x, y)$ は E を xy 平面上の有界閉領域 D の上に 1 対 1 にうつしていて，

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \neq 0,\ (u, v) \in E$$

を満たしているとする．写像 $(u, v) \to (x, y)$ による E の像を D とする．このとき，D の内部で有界な連続関数 $f(x, y)$ に対して，次が成り立つ．

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_E f(\varphi(u, v), \phi(u, v)) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

例題 5.6

変数変換を利用して，楕円領域

$$D:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

の面積を求めよ (a，$b > 0$)．

解　変数変換 $x = au$，$y = bv$ により，単位円 $E : u^2 + v^2 \leq 1$ は楕円領域 D にうつされる．また，

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = ab - 0 \cdot 0 = ab$$

である．単位円 E の面積は π であるから，定理 5.3 を適用すれば，

$$|D| = \iint_D dx\, dy = \iint_E ab\, du\, dv = ab \iint_E du\, dv = ab\pi$$

を得る．

例題 5.7

変数変換 $x = u + v,\ y = u - v$ により次の重積分の値を求めよ.

$$\int_0^2 dx \int_0^{2-x} \{(x+y)^2 + x - y\}\, dy$$

解　この変数変換のヤコビアンは問題 4.15(1) により

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2$$

である．ところで，xy 平面上で積分する領域は

$$D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2-x\}$$

である．

$$E = \{(u,v)\,|\,0 \le u+v \le 2,\ 0 \le u-v \le 2-u-v\}$$

とすると，この変数変換により E は D にうつされ，

$$E = \{(u,v)\,|\,0 \le u \le 1,\ -u \le v \le u\}$$

でもある．よって，定理 5.3 により，

$$\begin{aligned}\iint_D \{(x+y)^2 + x - y\} dx\, dy &= \iint_E \{(2u)^2 + 2v\} |-2|\, du\, dv \\ &= 4\int_0^1 du \int_{-u}^{u} (2u^2 + v) dv \\ &= 4\int_0^1 4u^3 du \\ &= 4.\end{aligned}$$

問 5.6　変数変換 $x=u+v,\ y=u-v$ により次の重積分の値を求めよ．

$$\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y)e^{2(x-y)}\,dy$$

例題 5.8

次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{25-x^2-y^2}} \quad (D: x^2+y^2 \leq 16)$$

解　極座標変換により $r\theta$ 平面上の長方形領域

$$E = \{(r,\theta)\,|\,0 \leq r \leq 4,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

は D にうつる．また，例題 4.12 により，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ である．したがって，定理 5.3 により，

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{25-x^2-y^2}} &= \iint_E \frac{1}{\sqrt{25-r^2}}\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \frac{r}{\sqrt{25-r^2}}\,dr \\ &= \int_0^{2\pi} \Big[-\sqrt{25-r^2}\Big]_0^4 d\theta \\ &= 2\pi(5-3) = 4\pi.\end{aligned}$$

コメント：xy 平面の原点 $(0,0)$ の極座標は定義されていない．また，半直線 $\{(r,\theta)\,|\,r>0,\ \theta=0\}$ と半直線 $\{(r,\theta)\,|\,r>0,\ \theta=2\pi\}$ の上では極座標変換は 1 対 1 ではない．ところが，半直線 $\{(x,y)\,|\,x \geq 0,\ y=0\}$ の面積は 0 であるので，例題 5.8 のように計算すればよい．

問 5.7　次の重積分の値を求めよ．ただし，$a > 0$ である．

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy \quad (D : x^2 + y^2 \leq a^2)$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy \quad (D : x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y)$

(3) $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy \quad (D : x^2 + y^2 \leq ax,\ 0 \leq y)$

5.3　重積分の応用

例題 5.9

次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x-y}} \quad (D : 0 \leq y < x \leq 1)$$

解　被積分関数 $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ は直線 $x = y$ 上では定義できない．また，D 上有界ではない．このような場合，次のようにして重積分の値を求める．

$n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$D_n : \frac{1}{n} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n}$$

を考える．各 D_n は D に含まれる面積確定な閉領域（直角二等辺三角形）で，$\{D_n\}$ は D の近似列になっている．すなわち，

$$D_1 \subset \cdots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \cdots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$$

を満たしている．そこで，各 n について，重積分の値
$I_n = \iint_{D_n} f(x, y)dx\,dy$ を求める．

$$\begin{aligned}
I_n &= \iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x-y}} \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} dx \int_0^{x-\frac{1}{n}} (x-y)^{-\frac{1}{2}} dy \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\frac{-(x-y)^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} \right]_0^{x-\frac{1}{n}} dx \\
&= 2\int_{\frac{1}{n}}^{1} \left\{ x^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} dx \\
&= 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} x \right]_{\frac{1}{n}}^{1} \\
&= 2\left\{ \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

極限値

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{4}{3}$$

が求める重積分の値である．

コメント：この例題のように被積分関数 $f(x, y)$ が D 上で有界でない場合，および積分する領域 D が有界でない場合は，**近似列** $\{D_n\}$ を考え，

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)dx\,dy$$

と定義する．このようにして求める重積分を**広義重積分**という．なお，$f(x, y)$ が D 上の非負連続関数であれば，広義重積分の値は近似列の選び方に依らない．

問 5.8 次の広義重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x+y)^3} \quad (D : x, y \geq 0)$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (D : x > 0,\ 0 \leq y \leq x \leq 1)$

(3) $\displaystyle\iint_D e^{-xy} dx\,dy \quad (D : x \geq 0,\ 0 < a \leq y \leq b)$

定理 5.4 $f(x, y, z)$ を空間内の有界閉領域 V 上の連続関数とする．V 上の点 (x, y, z) の x のとりうる値の範囲が $a \leq x \leq a_1$ となったとき，各 x に対する V の**切り口**を

$$V_x = \{(y, z) \,|\, (x, y, z) \in V\}$$

とすると，

$$\iiint_V f(x, y, z) dx\,dy\,dz = \int_a^{a_1} \left\{ \iint_{V_x} f(x, y, z) dy\,dz \right\} dx$$

が成り立つ．

例題 5.10

次の三重積分の値を求めよ．

$$\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} \quad (V : x+y+z+ \leq 1,\ x, y, z \geq 0)$$

解　V 上の点 (x, y, z) の x のとりうる値の範囲は $0 \leq x \leq 1$ で，各 x に対する V の切り口は

$$V_x = \{(y, z) \,|\, y + z \leq 1 - x,\ y, z \geq 0\}$$

である．また，

$$V_x = \{(y, z) \,|\, 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

でもある．したがって，

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 \left\{ \iint_{V_x} \frac{dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} \right\} dx \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left\{ \frac{1}{2(1+x+y+z)^2} - \frac{1}{8} \right\} dy \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)} - \frac{1}{8} y \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}(1-x) + \frac{1}{2(1+x)} \right\} dx \\
&= \log\sqrt{2} - \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

例題 5.11

次の三重積分の値を求めよ．

$$\iiint_V x^2 dx\,dy\,dz \quad (V : x^2+y^2+z^2 \leq a^2)$$

解　空間の極座標

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta \quad (r > 0)$$

を利用する．そのヤコビアンは

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}\\ &= r^2\sin\theta\end{aligned}$$

である．また，$r\theta\varphi$ 空間の閉領域

$$E = \{(r,\theta,\varphi)\,|\,0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

が空間の極座標変換で V にうつる．よって，

$$\begin{aligned}\iiint_V x^2 dx\,dy\,dz &= \iiint_E (r\sin\theta\cos\varphi)^2 |r^2\sin\theta| dr\,d\theta\,d\varphi\\ &= \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi\\ &= \frac{4\pi}{15}a^5\end{aligned}$$

となる．

問 5.9　次の三重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{x+y} e^{x+y-z}dz$

(2) $\displaystyle\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad (V: x^2+y^2+z^2\leq a^2)$

(3) $\displaystyle\iiint_V (x+y+z)dx\,dy\,dz\quad (V: x^2+y^2+z^2\leq a^2,\ z\geq 0)$

定理 5.5　D は xy 平面上の有界な閉領域とし，$f(x,y)$，$g(x,y)$ は D 上の連続関数で，

$$f(x,y)\leq g(x,y),\ (x,y)\in D$$

を満たしているとする．このとき，2 つの曲面 $z=f(x,y)$，$z=g(x,y)$ ではさまれた立体

$$V=\{(x,y,z)|(x,y)\in D, f(x,y)\leq z\leq g(x,y)\}$$

の体積 $|V|$ は，次で与えられる．

$$|V|=\iint_D \{g(x,y)-f(x,y)\}\,dx\,dy.$$

例題 5.12

半径が a $(a>0)$ の球

$$V: x^2+y^2+z^2\leq a^2$$

の体積を求めよ．

解　(A) 定理 5.5 を用いる：

$$D : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$$

とおくと，

$$|V| = 8 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

である．この重積分の値を xy 平面上の極座標変換を利用して，

$$\begin{aligned} |V| &= 8 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

を得る．

(B) 定理 5.4 を用いる：V 上の点 (x, y, z) の x のとりうる値は $-a \leq x \leq a$ で，各 x に対する V の切り口は

$$V_x = \{(y, z) \mid y^2 + z^2 \leq a^2 - x^2\},$$

すなわち，半径 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の円である．したがって，

$$\begin{aligned} |V| &= \iiint_V dx\, dy\, dz \\ &= \int_{-a}^a dx \iint_{V_x} dy\, dz \\ &= \int_{-a}^a |V_x|\, dx \\ &= \int_{-a}^a \pi(a^2 - x^2)\, dx \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

(C) 空間の極座標を利用する：

$$
\begin{aligned}
|V| &= \iiint_V dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_E |r^2 \sin\theta| dr\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{a^3}{3}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi a^3.
\end{aligned}
$$

ここで，$E = \{(r,\theta,\varphi)\,|\,0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ である．

問 5.10　楕円体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

の体積を求めよ $(a, b, c > 0)$.

例題 5.13

次を示せ．

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

(**ガンマ関数とベータ関数**)

解　$a > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
D(a) &= \{(x,y)\,|\,0 < x \le a,\ 0 < y \le a\}, \\
E(a) &= \{(x,y)\,|\,x^2 + y^2 \le a^2,\ x > 0,\ y > 0\}
\end{aligned}
$$

とおく．すると
$$E(a) \subset D(a) \subset E(\sqrt{2}a)$$
である．ここで，関数 $f(x,y) = 4e^{-x^2-y^2}x^{2p-1}y^{2q-1}$ $(x,\ y > 0)$ を考える．$f(x,y) > 0$ であるから
$$\begin{aligned}\iint_{E(a)} f(x,y)\,dx\,dy &\leq \iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (5.1)\\ &\leq \iint_{E(\sqrt{2}a)} f(x,y)\,dx\,dy\end{aligned}$$
である．ところで，問題 5.11, 5.12 により
$$\begin{aligned}\iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{D(a)} e^{-x^2}x^{2p-1}e^{-y^2}y^{2q-1}\,dx\,dy\\ &= \left(2\int_0^a e^{-x^2}x^{2p-1}\,dx\right)\left(2\int_0^a e^{-y^2}y^{2q-1}\,dy\right)\\ &\to \Gamma(p)\Gamma(q) \quad (a \to \infty)\end{aligned}$$
である．また，極座標を利用して
$$\begin{aligned}I(a) &= \iint_{E(a)} f(x,y)\,dx\,dy\\ &= 4\iint_{E'(a)} e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2p-1}(r\sin\theta)^{2q-1}r\,dr\,d\theta.\end{aligned}$$

ここで，$E'(a) = \{(r,\theta)\,|\,0 < r \leq a,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ である．再び，問題 5.12,

問 3.23(6) により

$$
\begin{aligned}
I(a) &= \left(2\int_0^a e^{-r^2} r^{2p+2q-1}\,dr\right)\left(2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\,d\theta\right) \\
&= \left(2\int_0^a e^{-r^2} r^{2(p+q)-1}\,dr\right) B(p,q) \\
&\to \mathit{\Gamma}(p+q)B(p,q) \quad (a \to \infty).
\end{aligned}
$$

以上により，不等式 (5.1) において $a \to \infty$ とすると

$$
\mathit{\Gamma}(p+q)B(p,q) \leq \mathit{\Gamma}(p)\mathit{\Gamma}(q) \leq \mathit{\Gamma}(p+q)B(p,q)
$$

を得る．

問 5.11　関数 $f(x)$, $g(x)$ はそれぞれ半開区間 $(0,a]$, $(0,b]$ 上で連続で，広義積分 $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_0^b g(y)\,dy$ はともに収束するとする $(a, b > 0)$．このとき，広義重積分 $\displaystyle\iint_D f(x)g(y)\,dx\,dy$ も収束し，次が成り立つことを示せ．ここで，$D = \{(x,y) \mid 0 < x \leq a,\ 0 < y \leq b\}$ である．

$$
\iint_D f(x)g(y)\,dx\,dy = \int_0^a f(x)\,dx \int_0^b g(y)\,dy.
$$

問 5.12　次を示せ．

$$
2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1}\,dx = \mathit{\Gamma}(p).
$$

問 5.13　次を示せ．

$$
\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
$$

第6章　微分方程式

この章では，微分方程式を通じて，今まで学んできた微分積分学を振り返るという観点から，微分積分学の延長線上にあると見なされる範囲に限定して，1階および2階常微分方程式の解の初等性質と初等解法について学ぶ．そして，指数関数 e^x こそが微分方程式の解の構成に際し決定的な役割を演じていることを認識する．また，初学者の勉学に好都合なように，この章の問題には詳しい解答を付け加えておいた．

まず最初に，微分方程式とは何かということを数学的立場から考えてみよう．いま，x を独立変数とし，未知関数 y をその従属変数とするとき，x と y およびその n 階までの導関数 y', y'', $\cdots$, $y^{(n)}$ との間に成り立つ関係式

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

のことを，y を未知関数とする n **階常微分方程式**と呼ぶ．ここで，n は正の整数で F は $n+1$ 変数の関数である．特に，関数 F が y およびその導関数 $y^{(k)}$ $(1 \leq k \leq n)$ に関して1次式になっているとき，この微分方程式を**線形微分方程式**と呼び，そうでなときにはこれを**非線形微分方程式**と呼ぶ．本章では，常微分方程式しか扱わないのでこれを単に微分方程式と呼ぶことにする．

また，上の関係式 $F = 0$ を恒等的に満たしている x の関数 y を，この n 階微分方程式の**解**と呼ぶ．このような未知関数 y を積分によって求めることを**微分方程式を解く**という．

微分方程式の解が，この微分方程式の階数 n と同じ個数 n の任意定数

含んでいるとき，この解を**一般解**と呼び，この一般解に含まれる n 個の任意定数にそれぞれある特定の値を代入したときに得られる解を**特殊解**と呼ぶ．また，一般解の任意定数にどのような数値を代入しても得られないような解を**特異解**と呼ぶ.

6.1　1 階微分方程式

1 階微分方程式の解法には，それぞれの微分方程式に応じて色々な考え方があるが，ここでは**変数分離法**，**指数関数の性質**をうまく使う方法，そして**定数変化法**を用いて具体的に微分方程式を解いてみる。

変数分離法による解法は次の事実に基づいている。

例題 6.1

2 つの関数 f, g はそれぞれ x, y の関数とし，y を x の関数とする．このとき，2 つの変数 x, y が分離している微分方程式、つまり**変数分離形**の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x)g(y)$$

の一般解は、C を任意定数として

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C$$

なる形で与えられる.

解　初めに，y の関数 $\varphi(y)$ に対し次の関係式

$$\int \varphi(y)\,dy = \int \varphi(y)\frac{dy}{dx}\,dx$$

が成り立つことを示そう．一般に，合成関数の微分に関する基本性質から

$$\frac{d}{dx}\int \varphi(y)\,dy = \frac{dy}{dx}\,\frac{d}{dy}\int \varphi(y)\,dy = \frac{dy}{dx}\varphi(y)$$

が得られることに注意する．この両辺を積分すれば目標の関係式が得られる．そこで，与えられた微分方程式から

$$\frac{1}{g(y)}\,\frac{dy}{dx} = f(x)$$

が得られるが，この両辺を x に関して積分すると，積分定数 C を任意定数として，上で示した関係式を用いると

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{g(x)}\,\frac{dy}{dx}\,dx + C = \int \frac{1}{g(y)}\,dy + C$$

を得る．したがって，目指す一般解が得られた．

問 6.1　微分方程式 $xy' = 2y$ を解け.

問 6.2　微分方程式 $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ を解け.

問 6.3　微分方程式 $y'^2 + y^2 = 1$ を解け.

今度は，次の 2 つの形の 1 階線形微分方程式

$$L(y) \equiv y' + p(x)y = q(x)$$
$$L(y) \equiv y' + p(x)y = 0$$

の解法を考えてみよう．ここで，前者の形をした方程式を**非斉次方程式**と呼び，後者の方程式，つまり $q(x) = 0$ の場合をこの非斉次方程式に付随した**斉次方程式**と呼ぶ．線形斉次方程式の著しい特徴として，微分作用素 $L(y)$ の**線形性**がある．つまり，y_1, y_2 を $L(y) = 0$ の 2 つの解とし C_1, C_2

を2つの定数とするとき，容易に確かめられるように，$y = C_1y_1 + C_2y_2$ のときには

$$L(y) = L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = C_10 + C_20 = 0$$

が成り立つ．このように，2つの解の1次結合も解になる性質を**重ね合わせの原理**と呼ぶ.

さて，指数関数 e^x の性質をうまく用いて，1階線形微分方程式を解いてみよう．他方，定数変化法による解法は問6.9とその解のところで述べてある．

例題 6.2

微分方程式 $y' + p(x)y = q(x)$ の一般解は

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left\{\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right\}$$

で，また斉次方程式の場合，つまり $y' + p(x)y = 0$ の一般解は

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

で与えられる．ここで，C は任意定数である．

解　初めに前半を示そう．微分方程式の形から，指数関数の性質より

$$\frac{d}{dx}e^{\int p(x)\,dx} = p(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

が成り立つことに注意して

$$\frac{d}{dx}\left\{ye^{\int p(x)\,dx}\right\} = \{y' + p(x)y\}e^{\int p(x)dx} = e^{\int p(x)\,dx}q(x)$$

が得られる．この両辺を積分すると，C を積分定数として

$$ye^{\int p(x)\,dx} = \int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx + C$$

となる．したがって，この両辺に $e^{-\int p(x)\,dx}$ を掛けることにより目指す一般解が得られた．

次に，後半は前半の結果から明らかである．

問 6.4　a, b を定数とするとき，微分方程式 $y' + ay = b$ を解け．

問 6.5　微分方程式 $y' + 2xy = 2x$ を解け．

問 6.6　微分方程式 $y' + p(x)y = q(x)$ の一般解 y は，C を任意定数として

$$y = Cf(x) + g(x)$$

と表すことができる．逆に，C を任意定数として上の方程式の一般解 y がこの形に表されているとき，$Cf(x)$ は斉次方程式 $y' + p(x)y = 0$ の一般解で，$g(x)$ は元の非斉次方程式の 1 つの解である．

問 6.7　問 6.6 で与えた一般解 $y = Cf(x) + g(x)$ の任意定数 C にすべて異なる C_i $(1 \leq i \leq 3)$ を代入して得られる解を

$$y_i = C_i f(x) + g(x) \quad (1 \leq i \leq 3)$$

とする．このとき，

$$\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} = \frac{C_1 - C_3}{C_2 - C_3}$$

が成り立つ．特に，2 つの異なる解 y_1 と y_2 がわかっているときには，不定積分をすることなしに一般解を得ることができる．

問 6.8　例題 6.2 で与えた非斉次方程式の一般解は，確かにその微分方程式を満たしている．

問 6.9　微分方程式 $y' + p(x)y = q(x)$ を定数変化法で解け.

問 6.10　1階線形微分方程式 $y' + p(x)y = q(x)$ は特異解を持たない.

問 6.11　y_1, y_2 が斉次方程式 $y' + p(x)y = 0$ の2つの解ならば，ある定数 c が存在して $y_1 = cy_2$ か，または $y_2 = cy_1$ が成り立つ.

特異解に関しては，問 6.2，問 6.3 および問 6.10 からわかるように，1階の微分方程式が特異解をもつのは非線形方程式の場合に限ると結論することができる.

例題 6.3

非斉次方程式

$$y' + p(x)y = q(x)$$

の1つの特殊解 y_1 がわかっているとき，$y = z + y_1$ とおいて未知関数を y から z に変換すると，斉次方程式

$$z' + p(x)z = 0$$

が得られる．したがって，元の方程式の一般解は，C を任意定数として

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx} + y_1$$

で与えられる.

解　まず，$y_1' + p(x)y_1 = q(x)$ であることに注意して $y = z + y_1$ を非斉次方程式 $y' + p(x)y = q(x)$ に代入すると，簡単な計算により斉次方程式

$$z' + p(x)z = 0$$

が得られる．この一般解は例題 6.2 により，C を任意定数として

$$z = Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

で与えられる．よって，$y = z + y_1$ であることから，求める非斉次方程式の一般解は，C を任意定数として

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx} + y_1$$

で与えられる．

この例題から，非斉次方程式の一般解は，非斉次方程式の 1 つの特殊解と，この方程式に付随した斉次方程式に付随した斉次方程式の一般解との和で表されることがわかる．さらに例題 6.2 からわかるように，非斉次形の方程式を解くのに 2 回の不定積分をしなければならないが，斉次方程式の場合には 1 回の不定積分で解を得ることができる．したがって，一般に非斉次方程式を解くよりも斉次方程式を解く方が楽であるということができる．

この事実に着目して非斉次方程式を斉次方程式に変換する，つまり $q(x)$ を消去する方法を与えたのが例題 6.2 なのである．このように，$q(x)$ を消去して簡単な方程式に変換してから元の方程式を解くという手法は，後に述べる Riccati (リッカチ) の方程式を解く際に決定的な役割を演じることになる．

問 6.12　微分方程式 $y' + x^{-1}y = 3x$ を解け．

問 6.13　微分方程式 $y' + p(x)y = q(x)$ の 2 つの解 y_1, y_2 が，ある点 $x = x_0$ で $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ を満たせば $y_1 \equiv y_2$ を満たす．さらに，ある点 $x = x_0$ で $y_1(x_0) < y_2(x_0)$ を満たすときには，y_1, y_2 が共に定義されている区間 I 上で $y_1(x) < y_2(x)$ が成り立つ．

問 6.14　微分方程式 $y' + p(x)y = q(x)$ の 2 つの異なる解 y_1, y_2 がわかっているときには，1 回も不定積分することなしに，この方程式の一般解を

$$y = C(y_2 - y_1) + y_1$$

なる形で得ることができる．ここで，C は任意定数である．

注意　非斉次線形微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)$$

の一般解については，次の著しい特徴がある．すなわち，例題 6.3 からは 1 つの解がわかれば 1 回の不定積分で一般解が得られ，また問 6.13 からは 2 つの異なる解がわかれば不定積分を全くすることなく一般解を得ることができるということである．

さて今度は，1 階非線形の微分方程式の解法を考えてみよう．このような方程式の重要な例として，**Bernoulli(ベルヌーイ) の微分方程式**と **Riccati の微分方程式**とがある．これらを例題として挙げ，その解法を考えてみよう．

まず，解ける非線形微分方程式，つまり解の公式を与えることができる方程式の典型的な例として Bernoulli の微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)y^a$$

が有名である．ここで，a は実数である．もし $a = 0,\ 1$ の場合には上の方程式は例題 6.2 で扱った 1 階の線形方程式に帰着されるから，$a \neq 0,\ 1$ のときを考える．

例題 6.4

a を $a \neq 0, 1$ なる実数とするとき Bernoulli の微分方程式の一般解は

$$y^{1-a} = e^{-\int (1-a)p(x)\,dx}\left(\int e^{\int (1-a)p(x)\,dx}(1-a)q(x)dx + C\right)$$

で与えられる．ここで，C は任意定数である．

解　上で与えた Bernoulli の方程式の両辺を y^a で割ると

$$y^{-a}y' + p(x)y^{1-a} = q(x)$$

となる．ここで，従属変数 y から従属変数 z への変換を $z = y^{1-a}$ とすると，$z' = (1-a)y^{-a}y'$ となるから z に関する微分方程式

$$z' + (1-a)p(x)z = (1-a)q(x)$$

が得られる．この方程式は，例題 6.2 の方程式と見比べてみると例題 6.2 の $p(x), q(x)$ がそれぞれ $(1-a)p(x), (1-a)q(x)$ になっていることがわかる．したがって，例題 6.2 の結果より目指す解が得られた．

問 6.15　微分方程式 $xy' + y = x^3y^3$ を解け．

問 6.16　微分方程式 $xy' + y = y^2 \log x$ を解け．

問 6.17　例題 6.4 で与えた一般解は，確かに Bernoulli の微分方程式を満たしている．

さて，1 階非線形常微分方程式のもう 1 つの例として，Riccati の微分方程式

$$y' + p(x) + q(x)y + r(x)y^2 = 0$$

の解法とその解の性質について考えてみよう．この方程式の特徴として，直ちに一般解を構成する，つまり例題 6.2 の線形微分方程式や例題 6.4 の Bernoulli の微分方程式の場合のように，無条件で解の公式を得ることはできないいう事情がある．しかし，上で与えたこの方程式の形から容易にわかるように，$p(x) \equiv 0$ のときには，Riccati の方程式は $a = 2$ の Bernoulli の方程式になってしまう．したがって，例題 6.2 の解の後で述べたように，この方程式を解こうとする場合には未知関数 y を適当に変換して $p(x)$ を消去すればよい．このためにはまず，Riccati の方程式の特殊解を 1 つ見つけ出す必要がある．

以上述べた内容を具体化するために，次の例題を解くことから始めよう．

例題 6.5

Riccati の微分方程式

$$y' + p(x) + q(x)y + r(x)y^2 = 0$$

の 1 つの特殊解 $y = y_1$ がわかれば，$y = z + y_1$ と未知関数を y から z に変換することにより，次の形の Bernoulli の微分方程式

$$z' + \{q(x) + 2r(x)y_1(x)\}z = -z^2$$

が得られる．したがって，特殊解 y_1 がわかったときには

$$(y - y_1)^{-1} = e^{\int\{q(x)+r(x)y_1(x)\}\,dx}\left(\int e^{-\int\{q(x)+r(x)y_1(x)\}\,dx}\,dx + C\right)$$

が Riccati の方程式の一般解である．ここで，C は任意定数である．

解　$y = z + y_1$ を Riccati の方程式に代入すると

$$(z + y_1)' + p(x) + q(x)(z + y_1) + r(x)(z + y_1)^2 = 0$$

となって，y_1 が Riccati の方程式の解であることから z に関する Bernoulli の方程式

$$z' + \{q(x) + 2r(x)y_1(x)\}z = -z^2$$

を得る．これを例題 6.4 にしたがって解くと，いまの場合 $a = 2$ であるから

$$\begin{aligned}(y - y_1)^{-1} &= z^{-1}\\ &= e^{\int\{q(x)+2r(x)y_1(x)\}\,dx}\left(-\int e^{-\int\{q(x)+2r(x)y_1(x)\}\,dx}\,dx + C\right)\end{aligned}$$

が得られ，C を任意定数として，求める一般解が得られた．

注意　例題6.1，6.4，および6.5とこれらの解からわかるように，1階線形微分方程式，Bernoulliの微分方程式，およびRiccatiの微分方程式の三者は，これらの解法においてはまさに三位一体ともいえる密接な関係にある．

問6.18　微分方程式 $xy' - (x^2+2x) + (2x+1)y - y^2 = 0$ は $y = x$ を解にもつことを知って，この一般解を求めよ．

問6.19　例題6.5で与えたRiccatiの微分方程式の一般解 y は，C を任意定数として

$$y = \frac{Cf_1(x) + f_2(x)}{Cf_3(x) + f_4(x)}$$

なる形に表すことができる．ここで，$f_1(x)f_4(x) \neq f_2(x)f_3(x)$ である．逆に，上の関係式の両辺を微分して，任意定数 C を消去して得られる微分方程式はRiccatiの方程式となる．ただし，$f_1f_4 \neq f_2f_3$ である．

問6.20　$1 \leq i \leq 4$ に対し，問6.19で与えた一般解の C に C_i を代入して得られた特殊解を

$$y_i = \frac{C_if_1(x) + f_2(x)}{C_if_3(x) + f_4(x)}$$

とおけば，次の関係式

$$\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}\bigg/\frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4} = \frac{C_1 - C_3}{C_2 - C_3}\bigg/\frac{C_1 - C_4}{C_2 - C_4}$$

が成り立つ．ここで，左辺を $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$ の**非調和比**と呼ぶ．これより，$(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$ の非調和比と $(C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4)$ の非調和比とは一致することがわかった．

問6.21　Riccatiの微分方程式において，3つの解 y_1, y_2, y_3 がわかったとき，全く不定積分することなしに，その一般解を得ることができる．

問 6.22　Riccati の微分方程式において，2 つの解 y_1, y_2 がわかったときには，1 回の不定積分で一般解を得ることができる．

問 6.23　例題 6.5 で与えた Riccati の微分方程式は，未知関数 y を

$$y = \frac{1}{r(x)}\frac{z'}{z}$$

なる形で未知関数 z に変換することにより，2 階の斉次線形微分方程式

$$z'' + \left(q(x) - \frac{r'(x)}{r(x)}\right)z' + p(x)r(x)z = 0$$

に帰着される．

注意　非斉次線形微分方程式の場合にも既に注意として述べてあるように，Riccati の方程式の場合にも，次の著しい特徴がある．すなわち，Riccati の方程式では，例題 6.5 より 1 つの解がわかれば 2 回の不定積分で，また問 6.22 より 2 つの異なる解がわかれば 1 回の不定積分で，そして問 6.21 よりでは 3 つの異なる解がわかればまったく不定積分をすることなく一般解が得られことがわかる．

例題 6.2 からわかるように，線形微分方程式の場合には解の公式ともいえる一般解を得ることができた．また，例題 6.4 の Bernoulli の方程式や例題 6.5 の Riccati の方程式のように，非線形微分方程式の場合でも一般解を与える解の公式を求めることができた．しかし，非線形微分方程式の場合には一般解を与える解の公式が，いつも存在するとは限らないことは容易に推察できる．そこで，変数変換やその他にも何らかの方法で非線形方程式を線形方程式に変換できないだろうか，と考えるのは自然の成り行きである．ここで，例題 6.4 を振り返ってみると，非線形方程式である Bernoulli の方程式は変数変換により線形方程式に帰着することができた．同様に，例題 6.5 を見ても非線形方程式である Riccati の方程式

は，1 つの解を見つけ出してから変数変換をして Bernoulli の方程式を経て線形方程式に至っている．いずれの場合にも，到達した線形方程式を解いて一般解を得ることができた．

このように，非線形方程式を線形方程式に変換することは，**線形化問題**と呼ばれ，微分方程式を何らかの形で解くための非常に重要な手段であり考え方である．

6.2　2 階斉次線形微分方程式

この節では主として 2 階斉次線形微分方程式の解法と解の性質を調べてみよう．初めは a, b を実定数として，次の形の定数係数の非斉次と斉次の方程式

$$
\begin{aligned}
L(y) &\equiv y'' + ay' + by = f(x) \\
L(y) &\equiv y'' + ay' + by = 0
\end{aligned}
$$

について考え，次いで変数係数の非斉次と斉次の方程式

$$
\begin{aligned}
L(y) &\equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \\
L(y) &\equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = 0
\end{aligned}
$$

について考える．この場合も，1 階の場合と同様に微分作用素 $L(y)$ には線形性と重ね合わせの原理という重要な性質がある。

2 階の微分方程式となると，解の性質を調べる際に 1 階の場合には現れてこなかった概念，すなわち線形代数学のからの基礎知識として関数列の**関数行列式** (**Wronskian**)，そして関数列の **1 次独立**や **1 次従属**という考え方が必要となってくる．以下，しばらくはこれらについて考えてみよう．

いま，$n \geq 2$ を正の整数とする．ある区間 I で定義された n 個の関数列 $\{f_i\}_{i=1}^n$ が I 上で **1 次従属**であるとは，すべては 0 でない n 個の実定数 c_1，c_2，$\cdots$，c_n が存在して I 上で

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) \equiv 0$$

が成り立つときをいう．そして，1 次従属でないときに，この関数列は **1 次独立**と呼ばれる．これにしたがえば，関数列 $\{f_i\}_{i=1}^n$ が 1 次独立であるための必要十分条件は n 個の実数 c_1，c_2，$\cdots c_n$ が存在して，I 上で

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) \equiv 0$$

が成り立つときには常に $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ が成り立つことであることがわかる．

次に，関数列 $\{f_i\}_{i=1}^n$ が与えられたとき，この **Wronskian**(**関数行列式**) を $W[f_1, \cdots, f_n]$ とおいたとき，これは関数 f_j の i 階導関数を i 行 j 列にもつ行列式のことであり

$$W[f_1, \cdots, f_n] = \det\left(f_j^{(i)}(x)\right)$$

で与えられる．ここで，i, j の動く範囲は $0 \leq i \leq n-1$ で $1 \leq j \leq n$ であり，また $f_j^{(0)}(x) = f_j(x)$ であるとする．上の式の右辺はまた

$$W[f_1, \cdots, f_n] = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots\cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots\cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)} & \cdots\cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

と書くことができる．このように定めると，線形代数学からの基礎知識により，関数列 $\{f_i\}_{i=1}^n$ とこの Wronskian $W[f_1, \cdots, f_n]$ との間には，I 上で

$$\{f_1,\ \cdots,\ f_n\} \text{ が 1 次従属 } \Longrightarrow W[f_1,\ \cdots,\ f_n] \equiv 0$$

が成り立つ関係にあることがわかる．さらに，この対偶をとれば

$$W[f_1,\ \cdots,\ f_n] \not\equiv 0 \implies \{f_1,\ \cdots,\ f_n\}\text{ が 1 次独立}$$

が成り立つこともわかる．しかし，この逆は一般には成り立たない．つまり，関数系 $\{f_1,\ \cdots,\ f_n\}$ が 1 次独立ではあっても $W[f_1,\cdots,f_n] \equiv 0$ となる例がある．そのような例を $n = 2$ で挙げてみよう．$f_1(x)$ と $f_2(x)$ とを

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ x^2 & (x \leq 0) \end{cases}$$

のように定める．ここで，次の問を与えておこう．

問 6.24　上で与えた関数 f_1 と f_2 に対し，$W[f_1,\ f_2] \equiv 0$ ではあっても，これら 2 つの関数は 1 次独立である．

上の問は，$W[f_1,\ \cdots,\ f_n] \not\equiv 0$ であることは，関数系 $\{f_1,\ \cdots,\ f_n\}$ が 1 次独立系であるための十分条件ではあっても必要条件ではないことを示している．

さて以上の準備の下に，まず定数係数の斉次線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0$$

の解法と解の性質について考えてみよう．このために 1 階および 2 階の微分作用素をそれぞれ

$$\frac{d}{dx} = D, \qquad \frac{d^2}{dx^2} = D^2$$

と書くことにする．この約束にしたがうと

$$y' = \frac{dy}{dx} = Dy, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = D^2y$$

となる．そこで，2 階線形微分作用素 $L(y)$ を

$$L(y) = y'' + ay' + by = D^2y + aDy + by = (D^2 + aD + b)y$$

と定める．さらに，微分作用素 $L(y)$ に対して，次の λ に関する 2 次方程式

$$K(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

を $L(y)$ の**特性方程式**と呼ぶ.

ここで，上で定めた微分作用素 D の性質を例題の中で明らかにしよう.

例題 6.6

微分方程式 $L(y) = 0$ の特性方程式 $K(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が 2 つの異なる実解 λ_1, λ_2 をもつ，すなわち $a^2 - 4b > 0$ のとき

$$L(y) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y$$

が成り立つ．また，λ_0 が $K(\lambda) = 0$ の重解，つまり $a^2 - 4b = 0$ のとき

$$L(y) = (D - \lambda_0)^2 y$$

が成り立つ.

解　2 次方程式の解と係数の関係により

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a, \qquad \lambda_1\lambda_2 = b$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned}(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)y &= (D-\lambda_2)\{(D-\lambda_1)y\}\\ &= (D-\lambda_2)(Dy-\lambda_1 y)\\ &= D^2y-\lambda_1 Dy-\lambda_2 y+\lambda_1\lambda_2 y\\ &= y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y\\ &= y''+ay'+by=L(y)\end{aligned}$$

が得られる．したがって，前半は示された．後半の証明は問 6.25 の解でなされている．

問 6.25　例題 6.6 の後半を証明せよ．

問 6.26　λ_1, λ_2 は $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なる実数とするとき，

$$\begin{aligned}&(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)y=(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y\\ &(D-\lambda_1)e^{\lambda_1 x}=0\\ &(D-\lambda_1)^2e^{\lambda_1 x}=0\\ &(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)e^{\lambda_1 x}=0\end{aligned}$$

が成り立つ．

　今度は，微分作用素 D の，指数関数 e^x との密接な結びつきの様子を次の例題で明らかにしよう．

例題 6.7

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ は実数で $\lambda_1 \neq \lambda_2$ とする．このとき，

$$(D-\lambda_0)e^{\lambda_0 x}y = e^{\lambda_0 x}Dy$$

$$(D-\lambda_0)^2 e^{\lambda_0 x}y = e^{\lambda_0 x}D^2 y$$

$$(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)e^{\lambda_1 x}y = e^{\lambda_2 x}De^{-\lambda_2 x}e^{\lambda_1 x}Dy$$

が成り立つ．

解　最初の等式は，微分作用素 D の定義により

$$\begin{aligned}(D-\lambda_0)e^{\lambda_0 x}y &= De^{\lambda_0 x}y - \lambda_0 e^{\lambda_0 x}y \\ &= \lambda_0 e^{\lambda_0 x}y + e^{\lambda_0 x}Dy - \lambda_0 e^{\lambda_0 x}y \\ &= e^{\lambda_0 x}Dy\end{aligned}$$

が成り立つことからわかる．2 番目の等式は問 6.26 に示してある．そして 3 番目の等式は上の結果を用いて

$$\begin{aligned}(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)e^{\lambda_1 x}y &= (D-\lambda_2)e^{\lambda_1 x}Dy \\ &= (D-\lambda_2)e^{\lambda_2 x}e^{-\lambda_2 x}e^{\lambda_1 x}Dy \\ &= e^{\lambda_2 x}De^{-\lambda_2 x}e^{\lambda_1 x}Dy\end{aligned}$$

が成り立つことからわかる．

問 6.27　$(D-\lambda_0)^2 e^{\lambda_0 x}y = e^{\lambda_0 x}D^2 y$ が成り立つことを示せ．

例題 6.7 を用いて，微分方程式の解法に直接に結びつく関係式を，次の例題の形で定式化することができる．

例題 6.8

例題 6.7 と同じ仮定の下に

$$(D-\lambda_0)y = e^{\lambda_0 x} D e^{-\lambda_0 x} y$$

$$(D-\lambda_0)^2 y = e^{\lambda_0 x} D^2 e^{-\lambda_0 x} y$$

$$(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)y = e^{\lambda_2 x} D e^{-\lambda_2 x} e^{\lambda_1 x} D e^{-\lambda_1 x} y$$

が成り立つ.

解　最初の式を示そう．これは例題 6.7 の解と同様にして

$$(D-\lambda_0)y = (D-\lambda_0)e^{\lambda_0 x} e^{-\lambda_0 x} y = e^{\lambda_0 x} D e^{-\lambda_0 x} y$$

が成り立つことからわかる．2 番目と 3 番目の等式は問 6.28 の解で明らかにする.

問 6.28　例題 6.8 の 2 番目と 3 番目の等式を示せ.

以上の準備の下に，定数係数 2 階斉次線形微分方程式の解法を次の例題で考えてみよう.

例題 6.9

a, b を実定数とし，微分方程式とこの特性方程式とをそれぞれ

$$L(y) = y'' + ay' + by = 0$$
$$K(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda^2 + b\lambda = 0$$

とする．いま，$a^2 - 4b = 0$ とするとき，$K(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$ ならば $L(y) = 0$ の一般解は，C_1, C_2 を 2 つの任意定数として

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_0 x}$$

と表される．また，$a^2 - 4b > 0$ とするとき，$K(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ ならば $L(y) = 0$ の一般解解は，C_1, C_2 を任意定数として

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

と表される．

解　例題 6.6 と例題 6.8 から次のようにして示すことができる．まず前半は，C_1, C_2 を積分定数として次の一連の式

$$\begin{aligned} &L(y) = (D - \lambda_0)^2 y = e^{\lambda_0 x} D^2 e^{-\lambda_0 x} y = 0 \\ &D^2 e^{-\lambda_0 x} y = 0 \\ &e^{-\lambda_0 x} y = C_1 + C_2 x \\ &y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_0 x} \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，前半が示された．後半も同様な考え方で，C_1, C_2

を積分定数として次の一連の式

$$
\begin{aligned}
&L(y) = (D-\lambda_2)(D-\lambda_1)y = e^{\lambda_2 x} D e^{-\lambda_2} e^{\lambda_1 x} e^{-\lambda_1 x} y = 0 \\
&De^{-\lambda_2 x} e^{\lambda_1 x} D e^{-\lambda_1 x} y = 0 \\
&e^{-\lambda_2 x} e^{\lambda_1 x} D e^{-\lambda_1 x} y = C_2 \\
&De^{-\lambda_1 x} y = C_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \\
&e^{-\lambda_1 x} y = \frac{C_2}{(\lambda_2-\lambda_1)} e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + C_1 \\
&y = \frac{C_2}{\lambda_2-\lambda_1} e^{\lambda_2 x} + C_1 e^{\lambda_1 x}
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで，C_2 は任意定数であるから，$\dfrac{C_2}{\lambda_2-\lambda_1}$ を改めて C_2 と書くことにすれば，求める一般解

$$
y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}
$$

が得られた．

問 6.29　微分方程式 $y'' + 6y' + 9y = 0$ を解け．

問 6.30　微分方程式 $y'' - 5y' + 6y = 0$ を解け．

問 6.31　問 6.29 の 2 つの特殊解 e^{-3x}, xe^{-3x} の Wronskian を計算し，これら 2 つの関数系は 1 次従属か 1 次独立かを判定せよ．

問 6.32　問 6.30 の 2 つの特殊解 e^{2x}, e^{3x} の Wronskian を計算し，これら 2 つの関数系は 1 次従属か 1 次独立かを判定せよ．

例題 6.9 では，$a^2 - 4b \geq 0$ の場合に，定数係数の線形斉次微分方程式

$$
L(y) \equiv y'' + ay' + by = 0
$$

の解法を考えたが，今度は $a^2-4b<0$ のときに上の方程式の解法を考えてみよう．この場合，実数の一般解を得るには実数の世界から一旦複素数の世界に入って解を構成し，しかる後に適切な操作をして実数の世界に戻って，一般解を構成するという経過を踏むことになる．

例題 6.10

$a,\,b$ は実定数で $a^2-4b<0$ とする．このとき，微分方程式

$$L(y) \equiv y'' + ay' + by = 0$$

の一般解 y は，$C_1,\,C_2$ を実数の任意定数とするとき

$$y = (C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)e^{px}$$

で与えられる．ここで，$p,\,q$ を $a,\,b$ で表すと

$$p = -\frac{a}{2}, \qquad q = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$$

となる．そして，$q>0$ であることに注意する．

解　この場合の特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の解は

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{4b-a^2}\,i}{2} = p \pm iq$$

となるから，$\alpha = p + iq$ とおけば例題 6.6 の場合と同様にして

$$L(y) = D^2y + aDy + by = (D-\overline{\alpha})(D-\alpha)y = 0$$

を得る．ここで，複素数の世界に入って $L(y)=0$ の一般解を求めると，例題 6.9 で行ったのと同様な考え方で，$A,\,B$ を複素数の任意定数として

$$y = Ae^{\overline{\alpha}x} + Be^{\alpha x}$$

が得られる．ここで，複素数の世界から実数の世界に戻って解を構成してみよう．まず，A, B は複素数の任意定数であるから，実数の任意定数 C_1, C_2 を用いて

$$A = C_1 + C_2 i, \qquad B = \overline{A} = C_1 - C_2 i$$

とおいてみる．そうすると，上で与えた複素数での一般解は

$$\begin{aligned} y &= Ae^{\overline{\alpha}x} + \overline{A}e^{\alpha x} = 2\mathrm{Re}Ae^{\overline{\alpha}x} \\ &= 2\mathrm{Re}\{(C_1 + C_2 i)(\cos qx - i\sin qx)e^{px}\} \\ &= 2(C_1\cos qx + C_2\sin qx)e^{px} \end{aligned}$$

となる．C_1, C_2 は実数の任意定数であったから，$2C_1, 2C_2$ をそれぞれ改めて C_1, C_2 と書けば，目指す一般解

$$y = (C_1\cos qx + C_2\sin qx)e^{px}$$

が得られたことになる．

問 6.33　例題 6.10 で得た解

$$y = (C_1\cos qx + C_2\sin qx)e^{px}$$

は確かに方程式 $L(y) = 0$ を満たす.

問 6.34　微分方程式 $y'' - 2y' + 5y = 0$ を解け.

問 6.35　$q \neq 0$ のとき，関数系 $\{e^{px}\cos qx,\ e^{px}\sin qx\}$ の Wronskian を計算し，この系が 1 次従属系か 1 次独立系かを判定せよ.

6.3　2階非斉次線形微分方程式

この節ではまず，2階非斉次でしかも定数係数の微分方程式

$$L(y) \equiv y'' + ay' + by = f(x)$$

の解法について考えてみよう．一般的な解法については，例題6.12で述べる変数係数の場合に深く考えることにして，ここでは試行錯誤を基本にした定数係数の場合に特有の解法を考えてみる．このためにはまず次の例題から考えてみよう．

例題 6.11

非斉次微分方程式

$$L(y) \equiv y'' - 3y' + 2y = e^{4x}\sin x$$

の一般解は C_1, C_2 を任意定数として

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{10}e^{4x}(-\cos x + \sin x)$$

で与えられる．

解　与えられた微分方程式の非斉次項 $e^{4x}\sin x$ の形を見て，この方程式の1つの解 y として

$$y = e^{4x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

が考えられるのではないかと予測する．ここで，c_1, c_2 はこれから決定しようとする定数である．この y に対して y' と y'' とを計算すると

$$y' = e^{4x}\{(ac_1 + c_2)\cos x + (-c_1 + 4c_2)\sin x\}$$
$$y'' = e^{4x}\{(15c_1 + 8c_2)\cos x + (-8c_1 + 15c_2)\sin x\}$$

が得られる．これら y, y', y'' を与えられた微分方程式に代入すると

$$e^{4x}\{5(c_1+c_2)\cos x+5(-c_1+c_2)\sin x\}=e^{4x}\sin x$$

を得る．これより

$$c_1+c_2=0, \qquad 5(-c_1+c_2)=1$$

となるから，この連立方程式を解けば元の非斉次方程式の特殊解として

$$y=\frac{1}{10}e^{4x}(-\cos x+\sin x)$$

が得られる．他方，上の斉次方程式 $L(y)=0$ の特性方程式は

$$\lambda^2-3\lambda+2\lambda=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

であり，斉次方程式 $L(y)=0$ の一般解 y_1 は C_1, C_2 を任意定数として

$$y_1=C_1e^x+C_2e^{2x}$$

となる．したがって，与えられた微分方程式 $L(y)=e^{4x}\sin x$ の一般解 y は

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{10}e^{4x}(-\cos x+\sin x)$$

で与えられる．この y は，確かに 2 階の微分方程式 $L(y)=e^{4x}\sin x$ を満たし，かつ 2 つの任意定数 C_1, C_2 を含むから，本章の初めに与えた一般解の定義により，上の y は一般解となる。

問 6.36　微分方程式 $L(y)=y''-4y'+3y=\sin x$ を解け.

問 6.37　微分方程式 $L(y)=y''-2y'-3y=x^2$ を解け.

問 6.38　微分方程式 $L(y)=y''-3y'+2y=e^{2x}$ を解け.

この章の最後に，変数係数の非斉次 2 階線形微分方程式の定数変化法による解法を例題として与えよう．このためには，斉次方程式の 2 つの解と Wronskian との関係が重要である．

例題 6.12

非斉次の変数係数 2 階微分方程式

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

を考える．いま，方程式 $L(y) = 0$ の 2 つの解 y_1, y_2 の Wronskian を

$$W(x) = W[y_1, y_2]$$

とおく．このとき，$W(x)$ は C を任意定数として

$$W(x) = Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

と書き表される．したがって，この場合には $W(x)$ が定義されている区間 I 上で $W(x) \equiv 0$ かまたは $W(x) \neq 0$ の何れか一方だけが成り立つ．さらに，方程式 $L(y) = 0$ の 2 つの解 y_1, y_2 で作った Wronskian が条件 $W[y_1, y_2] \neq 0$ を満たすとき，方程式 $L(y) = r(x)$ の特殊解は

$$y_3 = -y_1 \int \frac{r(x)y_2(x)}{W(x)}\,dx + y_2(x) \int \frac{r(x)y_1(x)}{W(x)}\,dx$$

で与えられる．したがって，非斉次方程式 $L(y) = r(x)$ の一般解は

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$$

で与えられる．ここで，C_1, C_2 は 2 つの任意定数である．

解　初めに，$W(x)$ を微分すると y_1, y_2 は $L(y)=0$ の解であるから

$$y_1''=-p(x)y_1'-q(x)y_1, \qquad y_2''=-p(x)y_2'-q(x)y_2$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}W(x)&=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -p(x)y_1'-q(x)y_1 & -p(x)y_2'-q(x)y_2 \end{vmatrix}\\ &=-p(x)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}-q(x)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\\ &=-p(x)W(x)\end{aligned}$$

を得る．よって，1 階の線形微分方程式が得られた．これを解くと

$$W(x)=Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

を得る．ここで，C は任意定数である．これより $C=0$ のときは $W\equiv 0$ となり，また $C\neq 0$ のときには $W(x)\neq 0$ となることがわかった．これで前半が証明された．

次に後半を証明するために，定数変化法により方程式 $L(y)=r(x)$ の一般解を求めよう．まず，2 つの関数 $C_1(x), C_2(x)$ に対し

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$$

が初めに与えた方程式 $L(y)=r(x)$ の解となるように C_1, C_2 を定めよう．そこで，上で与えた y を微分すると

$$y'=C_1(x)y_1'+C_2(x)y_2'+\{C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2\}$$

が成り立つ．ここで

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

とおく．そして，この状況の下で

$$y'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + \{C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2'\}$$

が成り立つ．ここでまた，上の場合と同様に

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = r(x)$$

とおく．したがって，$C_1'(x)$ と $C_2'(x)$ に関する連立方程式

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \qquad C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = r(x)$$

を解いて，さらに $C_1'(x), C_2'(x)$ を積分すると，条件により

$$W(x) = W[y_1, y_2] \neq 0$$

であることから

$$C_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W(x)}\,dx, \qquad C_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W(x)}\,dx$$

が得られる．よって，$L(y) = r(x)$ の特殊解として

$$\begin{aligned} y_3 &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \\ &= -y_1 \int \frac{r(x)y_2(x)}{W(x)}\,dx + y_2 \int \frac{r(x)y_1(x)}{W(x)}\,dx \end{aligned}$$

が得られた．したがって，初めに与えられた方程式 $L(y) = r(x)$ の一般解は

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$$

なる形で得られた．ここで，C_1, C_2 は任意定数である．

初めに，方程式 $L(y)=0$ の 2 つの解 y_1, y_2 で $W[y_1, y_2] \neq 0$ を満たすものをとり，この斉次方程式の一般解 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ を考える．ここでは，C_1, C_2 は任意定数である．次に，C_1, C_2 を関数と考えて

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$$

が非斉次方程式 $L(y) = r(x)$ を満たすように $C_1(x)$, $C_2(x)$ を定めてこの非斉次方程式の特殊解を求める考え方を**定数変化法**と呼ぶ．また，1 階の方程式に対しては既に，問 6.9 で定数変化法による解法は示しておいた．

問 6.39　例題 6.12 で与えた y_3 は方程式 $L(y) = r(x)$ の解であることを確認せよ．

問 6.40　微分方程式 $L(y) \equiv y'' - \dfrac{x}{x-1} y' + \dfrac{1}{x-1} y = x - 1$ を解け．ただし，$x \neq 1$ の条件の下で考える．

問 6.41　微分方程式 $L(y) \equiv y'' - 5y' + 4y = x^2$ を例題 6.11 と例題 6.12 の考え方で解け．

問 6.42　微分方程式 $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2$ を解け．これを解くにはまず，この方程式の両辺を x^2 で割って次の形

$$L(y) \equiv y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 1$$

の方程式で考えよ．そこで初めに，$W(x) = W[y_1,\ y_2] \neq 0$ を満たすような $L(y) = 0$ の 2 つの解 y_1 と y_2 とを見つけよ．ただしこの問題は，$x \neq 0$ なる条件の下で考える．

問題の解答

第１章

問 1.1　(1) $-\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ とはさみうちの原理から，与式 $= 0$.

(2) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ より，与式 $= \dfrac{1}{2}$.

(3) $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ より，与式 $= \dfrac{1}{2}$.

(4) $1+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ より，与式 $= \dfrac{1}{3}$.

(5) 公式 1.5(4) と $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n}$
$= \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)$ より，与式 $= e$.

(6) $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ と上の (5) より，与式 $= e^{-1}e = 1$.

問 1.2　(1) 数学的帰納法より，すべての $n = 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$a_n < 2$ であることを示す．$n = 1$ のときは明らかである．$a_n < 2$ と仮定すると

$$a_{n+1} - 2 = \sqrt{a_n + 2} - 2 = \frac{a_n - 2}{\sqrt{a_n+2}+2} < 0.$$

よって，$\{a_n\}$ は上に有界である．また，$a_2 = \sqrt{3} > a_1$．$a_{n+1} > a_n$ と仮

定すると
$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{a_{n+1}-a_n}{\sqrt{a_{n+1}+2}+\sqrt{a_n+2}}>0.$$
したがって，$\{a_n\}$ は単調増加数列である．
(2) (1) によって数列 $\{a_n\}$ は収束するから，極限値を $\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n$ として，与えられた漸化式から $\alpha=\sqrt{\alpha+2}$．$\alpha>0$ より，$\alpha=2$．

問 1.3 (1) $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ より，$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x+4}$ $\displaystyle=\frac{1}{12}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}}{x-2}$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1})}{(x-2)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0$ (k は正の整数) であるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x^2-x+2}$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1.$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}+x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}{x}$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)=0.$$

問 1.4 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{x^2}=-\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=-1.$

(2) $x=-t$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=e.$$

問 1.5　(1) 2 (ヒント：$\dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x} + \dfrac{e^{-x} - 1}{-x}$.)
(2) e^a (ヒント：$\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = \left\{\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^a$)
(3) e (ヒント：$\log(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{\log(1 + \sin x)}{\sin x}$.)

問 1.6　$\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 3x + a}{x - 1}$ が収束するためには，$\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2 + 3x + a) = 0$ でなければならない．$\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2 + 3x + a) = 4 + a$ より，$a = -4$．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x + 4) = 5$ であるから，$f(x)$ がすべての点で連続であるためには，$b = 5$.

問 1.7　$f(x) = x - \cos x$ とすると，$f(x)$ は連続で，$f(0) = -1 < 0$．また，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} > 0$．したがって，$f(0) \cdot f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$．系 1.13 から，区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ で $f(x) = 0$ は解をもつ．よって，$x - \cos x = 0$ は区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ で解をもつ．

問 1.8　(1) $y = \tan^{-1} x$，$z = \cot^{-1} x$ とおくと，$x = \tan y$，$x = \cot z = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$．したがって，$\tan y = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$．$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$y = \dfrac{\pi}{2} - z$．よって，$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = y + z = \dfrac{\pi}{2}$.
(2) $y = \sin^{-1} \dfrac{3}{5}$，$z = \sin^{-1} \dfrac{4}{5}$ とおくと，$\sin y = \dfrac{3}{5}$，$\sin z = \dfrac{4}{5}$．したがって，$\sin^2 y + \sin^2 z = 1$，すなわち，$\sin^2 y = 1 - \sin^2 z = \cos^2 z$．したがって，$\sin y = \pm\cos z = \pm\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$．よって，$\sin^{-1} \dfrac{3}{5} + \sin^{-1} \dfrac{4}{5} = y + z = \dfrac{\pi}{2}$.
(3) $y = \cosh^{-1} x$ とおくと，$x = \cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$．$t = e^y$ とおくと，$t^2 - 2xt + 1 = 0$．これを解くと，$t = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$．$t \geq 1$ より，$t = x + \sqrt{x^2 - 1}$．したがって，$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$．よって，$\cosh^{-1} x =$

$y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

(4) $y = \coth^{-1} x$ とおくと，$x = \coth y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$. $t = e^y$ とおいて整理すると，$t^2 = \dfrac{x+1}{x-1}$. $t > 0$ より，$t = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$. したがって，$\coth^{-1} x = y = \dfrac{1}{2} \log \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

(5) 定義より，$(\cosh x - \sinh x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \cosh nx - \sinh nx$.

第2章

問 2.1 微分可能である.（ヒント：$\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = |h|$. ）

問 2.2 $(\cos x)' = -\sin x$.（ヒント：$\cos(x + h) - \cos x = -2 \sin \left(x + \dfrac{h}{2}\right) \sin \dfrac{h}{2}$.）

問 2.3 $(\log(-x))' = \dfrac{1}{x}$ $(x < 0)$.
（ヒント：$\dfrac{\log(-(x+h)) - \log(-x)}{h} = \dfrac{1}{h} \log \left(1 + \dfrac{h}{x}\right)$. ）

問 2.4 (1) $\sec^2 x \left(= \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$ （ヒント：$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. 商の微分公式（定理 2.5(3)）を適用する. ） (2) $\dfrac{1}{x \log a}$ （ヒント：$\log_a |x| = \dfrac{\log |x|}{\log a}$.）

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ （ヒント：例題 2.4 と合成関数の微分法を用いる.）

(4) $(\log a) a^x$（ヒント：$a^x = e^{x \log a}$. または，対数微分法を用いる.）

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + A}}$ （ヒント：例題 2.3 と合成関数の微分法を用いる.）

(6) $(1 + \log x) x^x$（ヒント：$x^x = e^{x \log x}$. または，対数微分法を用いる.）

問 2.5 (1)（ヒント：関数 $y=\sin x$ は閉区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ で狭義単調増加で $y'=\cos x\neq 0\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ である．逆関数の微分法を適用する.）
(2)（ヒント：関数 $y=\tan x$ は開区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ で狭義単調増加で $y'=\frac{1}{\cos^2 x}\neq 0\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ である．逆関数の微分法を適用する.）

問 2.6 $-\frac{b}{\sqrt{3}a}$

問 2.7 (1) $-\frac{b}{a}\tan t\ \left(t\neq 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ (2) $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^2}\ \left(t\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

問 2.8 （ヒント：$g(x)=f(x)-Ax\ (x\in[a,b])$ とおいて，最大値・最小値の定理を適用する.）

問 2.9 (1) $f(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)$ とおく．すると，$f(0)=0,\ f'(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$. $f'(0)=0,\ f''(x)=-\sin x+x>0\ (x>0)$. ゆえに，$f'(x)>0\ (x>0)$. $f(0)=0$ だから，$f(x)>0\ (x>0)$.
(2), (3) 略.

問 2.10 （ヒント：$n\ (n=0,1,\cdots)$ に関する数学的帰納法を用いる.）

問 2.11 (1) $\frac{1}{2}\left\{3^n\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$
（ヒント：$\cos 2x\cos x=\frac{1}{2}\left(\cos 3x+\cos x\right)$. 問 2.10 を利用する.）
(2) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\ \ (n\geq 1)$.
(3) $\frac{n!}{2}\left\{\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right\}$

（ヒント：$\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\Big)$.）
(4) $k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$.

問 2.12 (1) $x^2\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-2nx\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-n(n-1)\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
(ヒント：ライプニッツの公式と例題 2.8 を用いる.)
(2) $e^x(\sqrt{2})^n\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right)$
（ヒント：$(e^x\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x\sqrt{2}\Big(x+\dfrac{\pi}{4}\Big)$.）

問 2.13 (3) $f(x)=\cos x$ とおく．問 2.10 より $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ である．したがって $f(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+2}$, $R_{2n+2}=(-1)^{n+1}\dfrac{\cos(\theta x+(n+1)\pi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$ $(0<\theta<1)$ である．ところで，$|R_{2n+2}|\leq\dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\to 0$ $(n\to\infty)$.

問 2.14 (1)（ヒント：$(1-x)(1+x+\cdots+x^n)=1-x^{n+1}$, よって，$\dfrac{1}{1-x}=1+x+\cdots+x^n+\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.）
(2)（ヒント：$(1-x)^2(1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n)$ を展開する.）
(3)（ヒント：$\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1}{2}\Big\{\log(1+x)-\log(1-x)\Big\}$. 例題 2.10(4) を適用する.）

問 2.15 $e^{i\theta}=1+i\theta+\dfrac{(i\theta)^2}{2!}+\dfrac{(i\theta)^3}{3!}+\dfrac{(i\theta)^4}{4!}+\dfrac{(i\theta)^5}{5!}+\cdots$
$=\Big(1-\dfrac{\theta^2}{2!}+\dfrac{\theta^4}{4!}-\cdots)+i(\theta-\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{\theta^5}{5!}-\cdots\Big)$.

問 2.16 (1) ∞ (2) 0 (3) $\log\dfrac{a}{b}$ (4) 1

問 2.17　(1) $\frac{1}{2}$ （ヒント：$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}e^{\theta x}$ $(0 < \theta < 1)$.）
(2) $\dfrac{1}{2}$ （ヒント：$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}\cos\Big(\theta x + \dfrac{4\pi}{2}\Big)$ $(0 < \theta < 1)$.）

問 2.18　(1) 極値は存在しない.
(2) 極大値 $f\Big(-\dfrac{2}{3}\Big) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，極小値 $f(0) = 0$.
(3) 極大値 $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$.

問 2.19　略

第3章

問 3.1　(1) $F(x) = \dfrac{1}{6}(x+1)^6 + C$ だから，$F(0) = \dfrac{1}{6} + C = 0$ より $F(x) = \dfrac{1}{6}\{(x+1)^6 - 1\}$.
(2) $F(x) = -\dfrac{1}{(x+3)} + C$ だから，$F(0) = -\dfrac{1}{3} + C = 0$ より
$F(x) = -\dfrac{1}{(x+3)} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{x}{3(x+3)}$.
(3) $F(x) = (x+1)\log(x+1) - x + C$ だから，$F(0) = C = 0$ より
$F(x) = (x+1)\log(x+1) - x$.

問 3.2　(1) $-\dfrac{1}{3}(1-2x)^{\frac{3}{2}}$　(2) $\dfrac{1}{6(2-3x)^2}$　(3) $\tan^{-1}(x-1)$
(4) $\dfrac{2}{3}(x-1)\sqrt{x+2}$　(5) $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$
(6) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ だから，$\log|\log x|$.

問 3.3 (1) $\dfrac{1}{22}(x^2+1)^{11}$ (2) $-\dfrac{1}{2}\cos(x^2+2)$ (3) $\dfrac{1}{5}\sin^5 x$
(4) $\cos^5 x = (1-\sin^2 x)^2\cos x = (1-2\sin^2+\sin^4 x)\cos x$ と書けるので，

$$\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$$

(5) $(\log x)^3 = (x)'(\log x)^3$ により，部分積分を繰り返し利用して，

$$x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x\log x - 6x.$$

問 3.4 (1) $\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{3}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$
$= \dfrac{1}{3(x+1)} - \dfrac{2x-1}{6(x^2-x+1)} + \dfrac{1}{2(x^2-x+1)}.$
(2) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$

問 3.5 (1) 前問の (1) に部分分数分解は与えられている．それを利用すると，

$$\frac{1}{3}\log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

(2) 前問の (2) の部分分数分解を利用して，

$$2\log\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}.$$

(3) 被積分関数は $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-3}$ と分解できるので，

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}\right|.$$

(4) 被積分関数は $-\dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x+1}$ と分解できるので，

$$4\log\left|\frac{x+1}{x}\right| + \frac{1-8x}{2x^2}.$$

問 3.6 (1) $t=\sqrt{x+3}$ とおくと，$x=t^2-3,\ dx=2t\,dt$ だから

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+3}}\,dx = 2\int (t^2-1)\,dt = \frac{2}{3}t^3-2t = \frac{2}{3}x\sqrt{x+3}.$$

(2) $t=\sqrt{1+x^2}$ とおくと，$x^2=t^2-1,\ xdx=t\,dt$ だから

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int (t^2-1)\,dt = \frac{1}{3}t^3-t = \frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2}.$$

(3) $t=x^4$ とおくと，$dt=4x^3\,dx$ より

$$\int \frac{x^3}{x^8+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\tan^{-1}t = \frac{1}{4}\tan^{-1}x^4.$$

問 3.7 (1) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}+\log|x+\sqrt{x^2-1}|\right)$

(2) $x\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}+\dfrac{1}{2}\log\left|\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}-1\right|-\dfrac{1}{2}\log\left|\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}+1\right|$

問 3.8 (1) $\dfrac{2}{1-\tan\frac{x}{2}}$ (2) $\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$ (3) $\dfrac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\tan x\right)$

問 3.9 証明は略す.

問 3.10 (1) $\displaystyle\int_0^2 x^3\,dx=4.$ (2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+x}\,dx=\log 3.$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\Big[\log|x+\sqrt{x^2+1}|\Big]_0^1=\log(1+\sqrt{2}).$

(4) $\displaystyle\int_0^1 3^x\,dx=\left[\frac{1}{\log 3}3^x\right]_0^1=\frac{2}{\log 3}.$

問 3.11 (1) $\left[\dfrac{1}{15}(3x+1)^5\right]_{-1}^{1} = \dfrac{352}{5}$. (2) $\left[-\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2}\right]_{1}^{2} = \dfrac{7}{8}$.

(3) $\left[ax - \dfrac{4}{3}\sqrt{a}x\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}x^2\right]_0^a = \dfrac{a^2}{6}$.

(4) $t = x+1$ とおいて変数変換すると，$\left[\dfrac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \dfrac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$.

(5) $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

(6) $\left[\log(x^2+x+1)\right]_1^2 = \log\dfrac{7}{3}$.

(7) $\left[\log(x+1) - \log x - \dfrac{1}{x}\right]_1^2 = \log\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}$.

問 3.12 (1) $G(x) = \displaystyle\int_0^x F(t)\,dt$ とおいて，部分積分を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt &= [(x-t)^2F(t)]_0^x + 2\int_0^x (x-t)F(t)\,dt \\ &= [2(x-t)G(t)]_0^x + 2\int_0^x G(t)\,dt \\ &= 2\int_0^x G(t)dt.\end{aligned}$$

これを 2 回微分すると $2F(x)$ を得る．

(2) (1) と同様に考え，数学的帰納法を用いて，$n!F(x)$.

(3) $f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x)$

問 3.13 (1) 変数変換 $y = c - x$ を用いる．

(2) 同じく，変数変換 $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ を用いる．

(3) $\displaystyle\int_{-c}^0 f(x)dx$ に変数変換 $y = -x$ を用いる．

(4) 変数変換 $y=-x$ を用いるとよい.
(5) 変数変換 $y=\pi-x$ を用いるとよい.

問 3.14 (1)$[x\log x-x]_1^2=2\log 2-1$.
(2)$m\neq\pm n$ ならば 0. $m=\pm n$ $(\neq 0)$ ならば $\left[\dfrac{1}{4n}\sin 2nx+\dfrac{1}{2}x\right]_0^\pi=\dfrac{\pi}{2}$.
(3) 加法定理より

$$\cos mx\sin nx=\frac{1}{2}\{\sin(m+n)x-\sin(m-n)x\}$$

だから，$m+n$ が偶数の場合は 0 である．$m+n$ が奇数の場合は $m\neq n$ となるので次を得る.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\cos mx\sin nx\,dx&=\frac{1}{2}\int_0^\pi\{\sin(m+n)x+\sin(n-m)x\}\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{m+n}\cos(m+n)x-\frac{1}{n-m}\cos(n-m)x\right]_0^\pi\\&=\frac{2n}{n^2-m^2}.\end{aligned}$$

問 3.15 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.
(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x-\sin^7 x)\cos x\,dx=\frac{1}{24}$.
(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^5 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos^3 x\,dx=\frac{1}{24}$.

問 3.16 (1) 例題において，$c=\pi$ とおけるので，$\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^\pi|\sin x|\,dx=\frac{2}{\pi}$.
(2), (3),(4) 省略.

問 3.17 次のように積分は 2 つに分けられる.

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}\,dx=\int_0^1 x^{-\alpha}dx+\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx.$$

どちらかは ∞ になるので，積分は定義可能であるが，存在しない．

問 3.18 (1) 被積分関数は $x=0$ で定義されていないが，次のように 2 区間の広義積分として解釈できる．

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{|x|}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[4]{|x|}}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{|x|}}\,dx.$$

右辺の 2 つの広義積分は存在するので，左辺の広義積分も存在する．
(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2$ となり，被積分関数は $[0,1]$ で連続関数に拡張可能なので広義積分は存在する．
(3) まず，$\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1$ だから，$x=0$ では被積分関数は連続関数に拡張可能である．また，

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx \quad (0<a<b)$$

であるから，

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$

により，$b\to\infty$ のとき右辺は収束するので，広義積分は存在する．
(4) これも (3) と同様に，被積分関数は $x=0$ で連続関数に拡張できる．また，

$$\left|\frac{1-\cos x}{x^2}\right| \le \frac{2}{x^2}$$

より，右辺は $[a,\infty)$ $(a>0)$ で広義積分できるので，左辺の広義積分も存在する．
(5) $n\ge 1$ のとき，$1<x\le 2$ に対して

$$\frac{1}{x^n \log x} \ge \frac{1}{2^{n-1} x \log x}.$$

一方，

$$\int_1^2 \frac{1}{x\log x}\,dx = [\log\log x]_1^2 = \infty$$

だから，$n \geq 1$ のときの広義積分は定義できて，∞ である．$n=0$ の場合も $\dfrac{1}{\log x} \geq \dfrac{1}{x\log x}$ より，広義積分は定義できて，∞ である．

問 3.19 (1) $\left[-\dfrac{1}{n-1}x^{-(n-1)}\log x\right]_1^\infty + \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^\infty x^{-n}\,dx = \dfrac{1}{(n-1)^2}$.
(2) 不定積分の公式より

$$\int_0^\infty \sin x e^{-x}\,dx = \left[\frac{-\sin x - \cos x}{2}e^{-x}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

問 3.20 (1) $\Gamma(1) = 1$ は明らか．漸化式は部分積分で次の確かめられる．

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x}\,dx = \left[-x^s e^{-x}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx.$$

(2) (1) の結果より明らか．

問 3.21 $\displaystyle\int_1^\infty x^n e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = n! - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$ である．また

$$0 \leq \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \leq \int_0^1 e^{-x}dx \leq 1 - e^{-1}$$

である．ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_1^\infty x^n e^{-x}\,dx = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = 1.$$

問 3.22 (1) 変数変換 $x = t-1$ を用いて，

$$I_s = e\int_1^\infty t^s e^{-t}\,dt$$

である．ガンマ関数の存在証明と同様にして存在が証明できる．
(2) 部分積分を用いて，

$$I_s = \left[-(1+x)^s e^{-x}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty (1+x)^{s-1}e^{-x}\,dx = 1 + sI_{s-1}.$$

(3) n に関する帰納法で証明する．$n=0$ のとき成り立つのは明らか．n のとき成り立つと仮定すると，

$$I_{n+1} = 1 + (n+1)I_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!}.$$

問 3.23 (1) 定義から明らか．
(2) 変数変換 $y = 1-x$ を用いる．
(3) 部分積分で確かめられる．
(4) 重積分の項を参照せよ (例題 5.13).
(5) 変数変換 $x = \dfrac{y}{1+y}$ を用いるとよい．
(6) 変数変換 $x = \sin^2\theta$ を用いるとよい．
(7) $s = t = \dfrac{1}{2}$ とおくと，(6) より $B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \pi$ である．
また，$\Gamma(1) = 1$ であるから，(4) により $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \pi$ であるが，
$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$ より，$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を得る．
(8) 漸化式を用いた

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

を整理して得られる．

問 3.24 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^s(-\log x)^t = 0$ だから，被積分関数は $[0,1]$ 区間で連続関数に拡張できるので，広義積分は存在する．

(2) 部分積分を行なえばよい.
(3) 変数変換 $y = -\log x$ を考えると,

$$x = e^{-y}, \quad dx = -e^{-y}dy$$

より,

$$\int_0^1 x^s(-\log x)^t\,dx = \int_0^\infty y^t e^{-(s+1)y}\,dy$$

を得るが,さらに変数変換 $z = (s+1)y$ により

$$\int_0^1 x^s(-\log x)^t\,dx = \frac{1}{(s+1)^{t+1}}\int_0^\infty z^t e^{-z}\,dz = \frac{\Gamma(t+1)}{(s+1)^{t+1}}.$$

(4) (3) より明らか.
(5) $e^{-x\log x} = \displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{n!}(-x\log x)^k$ から推測される.
(6) (5) と同様である.

問 3.25 (1) 変数変換 $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$,さらに $t = \dfrac{y^2}{2}$ を用いると,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\,dy\\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\,dy\\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{\sqrt{2t}}\,dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1.\end{aligned}$$

(2) 変数変換 $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ を用いると,

$$\int_{-\infty}^\infty xf(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty (\sigma y+\mu)\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\,dy = \mu.$$

(3) 変数変換 $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$，さらに $t = \dfrac{y^2}{2}$ を用いると，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu)^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} (\sigma^2 y^2 + 2\sigma\mu y + \mu^2) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= \frac{\sqrt{2}\,\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} 2te^{-t} \frac{1}{\sqrt{2t}}\,dt + \mu^2 \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \mathit{\Gamma}\left(\frac{3}{2}\right) + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2.
\end{aligned}$$

問 3.26　(1) 変数変換 $x = \tan\theta$ によって

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2(n-1)}\theta\,d\theta = a_{2(n-1)}.$$

(2) 変数変換 $x = \sin\theta$ によって

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\,d\theta = a_{2n+1}.$$

問 3.27　(1) 0　(2) $\log\dfrac{b}{a}$　(3) $\dfrac{\pi}{2}\log\dfrac{a}{b}$　(4) $\log\dfrac{a}{b}$

第4章

問 4.1

(1) $y = x^2$，$0 \leq x \leq 1$ であるから図形は図 6.1 のようになる．

(2) $x = \dfrac{y^2}{4}$，$-2 \leq y \leq 0$ であるから図形は図 6.2 のようになる．

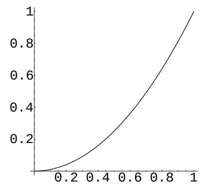

図 6.1: 問 4.1 (1) の図形

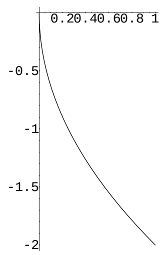

図 6.2: 問 4.1 (2) の図形

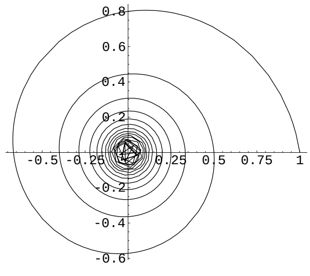

図 6.3: 問 4.2 の図形

問 4.2 例えば，$t=1,\ \frac{8}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{8}{7},\ \frac{2}{3},\ \cdots$ の点を調べて間を推測して，図 6.3 のような図形を得る．

問 4.3

(1) $f(1,\ -1)=2$．$f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2$．

(2) 例えば $x^2+y^2=0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2$ を描くことにより，グラフは図 6.4 のようになる．

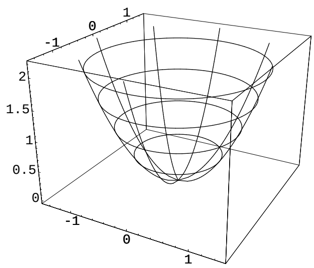

図 6.4: 問 4.3 のグラフ

問 4.4

(1) 例えば $f(x,\ y)$ で $y=0,\ \pm0.5,\ \pm1,\ \pm1.5,\ \pm2$ や $x=0,\ \pm0.5,\ \pm1,\ \pm1.5,\ \pm2$ を代入してグラフを描くことにより，図 6.5 を得る．

(2) 上と同様にして図 6.6 のグラフを得る．

問 4.5

(1) $\varPhi(1,\ 0)=(1,\ 0)$．$\varPhi(1,\ 1)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$．

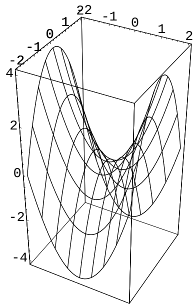

図 6.5: 問 4.4 (1) のグラフ

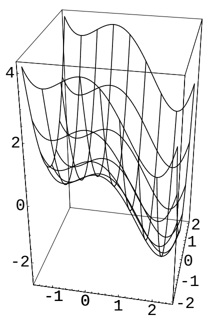

図 6.6: 問 4.4 (2) のグラフ

(2) $x=t$，$y=t$，$0<t\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおく．

$$u=u(t,\ t)=\frac{1}{2t},\quad v=v(t,\ t)=\frac{-1}{2t}$$

であるから，半直線 $u=-v$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq u<\infty$ となる．

(3) $x=t$，$y=-\sqrt{3}t$，$-\infty<t\leq-\dfrac{1}{2}$ とおく．

$$u=u(t,\ -\sqrt{3}t)=\frac{1}{4t},\quad v=v(t,\ -\sqrt{3}t)=\frac{\sqrt{3}}{4t}$$

であるから，線分 $v=\sqrt{3}u$，$-\infty<u\leq-\dfrac{1}{2}$ となる．

(4) $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$0\leq\theta\leq\pi$ とおく．

$$u=u(\cos\theta,\ \sin\theta)=\cos\theta,\quad v=v(\cos\theta,\ \sin\theta)=-\sin\theta$$

であるから，半円 $u^2+v^2=1$，$v\leq 0$ となる．

(5) $x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$，$0\leq\theta<2\pi$ とおく．

$$u=u(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)=\frac{\cos\theta}{2},\quad v=v(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)=\frac{-\sin\theta}{2}$$

であるから，円 $u^2+v^2=\dfrac{1}{4}$ となる．

問 4.6

$$d(\mathrm{P}_n,\ \mathrm{P}_0)=\sqrt{\frac{\cos^2 n\pi}{n^2}+\frac{\sin^2 n\pi}{n^2}}=\frac{1}{n}$$

であるから，収束する．

問 4.7 $r>0,\ 0\le\theta<2\pi$ に対して，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおくと $r\to 0$ のときに $(x,\ y)\to(0,\ 0)$ となる．いま，$r<\dfrac{1}{2}$ とすれば $\dfrac{1}{4}\le(x-1)^2\le\dfrac{9}{4},\ \dfrac{1}{4}\le(y-1)^2\le\dfrac{9}{4}$ となる．したがって

$$
\begin{aligned}
|f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)| &= \left|\frac{r^2\cos^2\theta(r\cos\theta-1)^2r^2\sin^2\theta(r\sin\theta-1)^2}{r^2\cos^2(r\cos\theta-1)^2+r^2\sin^2\theta(r\sin\theta-1)^2}\right| \\
&< \left|\frac{r^2\cos^2\theta\left(\dfrac{9}{4}\right)r^2\sin^2\theta\left(\dfrac{9}{4}\right)}{r^2\cos^2\left(\dfrac{1}{4}\right)+r^2\sin^2\theta\left(\dfrac{1}{4}\right)}\right| \\
&= \left|81r^2\cos^2\theta\sin^2\theta\right|\to 0 \quad (r\to 0)
\end{aligned}
$$

を得る．ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}f(x,\ y)=0$ である．

$r>0,\ 0\le\theta<2\pi$ に対して，$x=1+r\cos\theta,\ y=1+r\sin\theta$ とおくと $r\to 0$ のときに $(x,\ y)\to(1,\ 1)$ となる．いま，$r<\dfrac{1}{2}$ とすれば $\dfrac{1}{4}\le x^2\le\dfrac{9}{4},\ \dfrac{1}{4}\le y^2\le\dfrac{9}{4}$ となる．上と同様にして $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(1,\ 1)}f(x,\ y)=0$ を得る．

問 4.8

(1) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ (r>0,\ 0\le\theta<2\pi)$ とする．

$$
\begin{aligned}
&|xy\log(x^2+y^2)| \\
&=|r^2\cos\theta\sin\theta\log(r^2\cos^2\theta+r^2\sin\theta)| \\
&<2r|\log r|\to 0 \quad (r\to 0)
\end{aligned}
$$

であるから，極限値は存在して 0 である．

(2) $x = \alpha y^2$ に沿って $(x,\ y) \to (0,\ 0)$ とする．すなわち t をパラメータとして $x = \alpha t^2$，$y = t$ $(t \to 0)$ とする．このとき

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha t^2 \cdot t^2}{\alpha^2 t^4 + t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha}{\alpha^2+1} = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}$$

となるので，極限値は存在しない．

問 4.9　$(\alpha,\ \beta) \neq (0,\ 0)$ の場合．原点を含まないような $(\alpha,\ \beta)$ の近傍で考える．

$$\begin{aligned}
&f(x,\ y) - f(\alpha,\ \beta)\\
&= \frac{(x^3+y^3)(\alpha^2+\beta^2) - (\alpha^3+\beta^3)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(\alpha^2+\beta^2)}\\
&= \frac{\alpha^2x^3 + \alpha^2y^3 + \beta^2x^3 + \beta^2y^3 - \alpha^3x^2 - \beta^3x^2 - \alpha^3y^2 - \beta^3y^2}{(x^2+y^2)(\alpha^2+\beta^2)}
\end{aligned}$$

であるから，分子だけを計算すると

$$\begin{aligned}
&(\text{分子})\\
&= \alpha^2x^2(x-\alpha) + \beta^2y^2(y-\beta) + \alpha^2y^3 + \beta^2x^3 - \beta^3x^2 - \alpha^3y^2\\
&= \alpha^2x^2(x-\alpha) + \beta^2y^2(y-\beta) + \alpha^2y^3 - \alpha^2\beta^3 + \alpha^2\beta^3 + \beta^2x^3\\
&- \beta^3x^2 - x^3y^2 + x^3y^2 - \alpha^3y^2\\
&= (x-\alpha)(\alpha^2x^2 - \beta^3(x+\alpha) + y^2(x^2+\alpha x\alpha^2))\\
&+ (y-\beta)(\beta^2y^2 - x^3(y+\beta) + \alpha^2(y^2\beta y + \beta^2))
\end{aligned}$$

を得る．すなわち

$$\lim_{(x,\ y)\to(\alpha,\ \beta)} f(x,\ y) = f(\alpha,\ \beta)$$

となる．

$(\alpha,\ \beta) = (0,\ 0)$ の場合．$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ $(r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ とする．このとき

$$\begin{aligned} |f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)| &= \left|\frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\right| \\ &= r|\cos^3\theta + \sin^3\theta| \\ &< 2r \to 0 \qquad (r \to 0) \end{aligned}$$

となるので，原点で連続である．

問 4.10

(1)

$$f_x(x,\ y) = 3^2 + 2xy^3 + 2xy + y^2.$$

$$f_y(x,\ y) = 6x^2y^2 + x^2 + 2xy + 1.$$

(2)

$$f(x,\ y) = x^y y^x = x^y e^{x\log y}$$

であるから

$$f_x(x,\ y) = yx^{y-1}e^{x\log y} + x^y \log y e^{x\log y} = x^y y^x\left(\frac{y}{x} + \log y\right)$$

となる．x と y について対称であるから

$$f_y(x,\ y) = x^y y^x\left(\frac{x}{y} + \log x\right)$$

となる．

(3)

$$f_x(x,\ y) = e^x \sin y.$$

$$f_x(x,\ y) = e^x \cos y.$$

問 4.11 $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ のときは

$$f_x(x,\ y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f_y(x,\ y) = -\frac{y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

となり，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときは例題 4.8 の解より $f_x(0,\ 0) = 1$，$f_y(0,\ 0) = -1$ となる．

$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ のときは f_x，f_y ともに連続である．$y = x$ に沿って原点に近づくと

$$\lim_{t\to 0} f_x(t,\ t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4 + 3t^2t^2 + 2tt^3}{(t^2+t^2)^2} = \frac{3}{2} \neq f_x(0,\ 0)$$
$$\lim_{t\to 0} f_y(t,\ t) = \lim_{t\to 0} -\frac{t^4 + 3t^2t^2 + 2t^3t}{(t^2+t^2)^2} = -\frac{3}{2} \neq f_y(0,\ 0)$$

となるので原点で連続でない．

問 4.12 例題 4.8 の解答より $f_x(0,\ 0) = 1$，$f_y(0,\ 0) = -1$ であるから，原点で全微分可能であるとすれば定義より

$$f(h,\ k) - f(0,\ 0) = h - k + \varepsilon(h,\ k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\lim_{(h,\ k)\to(0,\ 0)} \varepsilon(h,\ k) = 0$$

とかける．いま，

$$h = t\cos\theta, \quad k = t\sin\theta \quad \left(0 < \theta < 2\pi, \quad \theta \neq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{2}\right)$$

とする．これを代入して

$$\frac{t^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{t^2} = t(\cos\theta - \sin\theta) + t\varepsilon(t\cos\theta,\ t\sin\theta)$$

となるので

$$\cos^3\theta - \sin^3\theta = \cos\theta - \sin\theta + \varepsilon(t\cos\theta,\ \sin\theta)$$

を得る．ここで $t \to 0$ とすれば $\varepsilon(t\cos\theta,\ \sin\theta) \to 0$ であるから

$$\cos^3\theta - \sin^3\theta = \cos\theta - \sin\theta$$

となる．さらに $\cos\theta - \sin\theta \neq 0$ であるから

$$1 = \cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta = 1 + \cos\theta\sin\theta$$

となる．これより $\cos\theta\sin\theta = 0$，すなわち $\cos\theta = 0$ または $\sin\theta = 0$ であるが，これは θ の仮定に反する．

問 4.13 $(a,\ b)$ で全微分可能であるから

$$\begin{aligned} f(a + t\cos\theta,\ b + t\sin\theta) - f(a,\ b) = f_x(a,\ b)t\cos\theta + f_y(a,\ b)t\sin\theta \\ + \varepsilon(t\cos\theta,\ t\sin\theta)t \end{aligned}$$

$$\lim_{t\to 0}\varepsilon(t\cos\theta,\ t\sin\theta) = 0$$

とかける．したがって

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a + t\cos\theta,\ b + t\sin\theta) - f(a,\ b)}{t} = f_x(a,\ b)\cos\theta + f_y(a,\ b)\sin\theta$$

を得る．

問 4.14 計算により，いずれの関数も連続な偏導関数をもつことが判るので全微分可能である．

(1)

$$df = f_x dx + f_y dy = \frac{2xdx + 2ydy}{1 + x^2 + y^2}$$

(2)

$$df = f_x dx + f_y dy = (2 + x)xe^x\cos y\ dx - x^2 e^x \sin y\ dy$$

問 4.15

(1)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = ad - bc$$

(2)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = \cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

(3)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = -uv - u(1-v) = -u$$

問 4.16

(1)

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = -y = 0$$

であるから，求める図形は直線 $y = 0$ である．

(2)

$$(u,\ v) = \varPhi(x,\ 0) = (0,\ 0)$$

であるから，求める図形は 1 点 $(0,\ 0)$ である．

(3) $u = y - xy,\ v = xy$ であるから $y = u + v$ となる．$u + v \neq 0$ のとき $x = \dfrac{v}{u+v}$ となる．$u + v = 0$ のとき $y = 0$ となり，このとき $v = 0$ となる．したがって $\varPhi$ による像は

$$\{(u,\ v) \mid u + v \neq 0\} \cup \{(0,\ 0)\}$$

となる．

(4) $u + v \neq 0$ であり，(2) より $x = \dfrac{v_0}{u_0 + v_0}$，$y = u_0 + v_0$ となる．

(5) $(u_0,\ v_0)$ と放物線 $u + v = 0$ との距離を R とする．$0 < r < R$ なる r を半径とし，中心 $(u_0,\ v_0)$ の開円板を近傍としてとればよい．逆写像は (4) より

$$\varPhi^{-1}(u,\ v) = \left(u + v,\ \frac{v}{u+v}\right)$$

となる．

問 4.17

(1)

$$f_x = \frac{-y^3}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad f_y = \frac{x^3}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xx} = \frac{3xy^3}{(x^2 - y^2)^{\frac{5}{2}}} \quad f_{xy} = f_{yx} = -\frac{3x^2y^2}{(x^2 - y^2)^{\frac{5}{2}}} \quad f_{yy} = \frac{3x^3y}{(x^2 - y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

(2)

$$f_x = ye^{xy} \qquad f_y = xe^{xy}$$

$$f_{xx} = y^2e^{xy} \qquad f_{xy} = f_{yx} = (1+xy)e^{xy} \qquad f_{yy} = x^2e^{xy}$$

(3)

$$f_x = 2x\cos(x^2+y^2) \qquad f_y = 2y\cos(x^2+y^2)$$

$$f_{xx} = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2)$$

$$f_{yy} = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -4xy\sin(x^2+y^2)$$

問 4.18

(1)

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x\ 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y\ 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

であるから $f_{xx} + f_{yy} = 0$ となる．

(2)

$$f_x = e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x\cos y = e^x\{(x+1)\cos y - y\sin y\}$$

$$f_{xx} = e^x\{(x+1)\cos y - y\sin y\} + e^x\cos y = e^x\{(x+2)\cos y - y\sin y\}$$

$$f_y = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) = -e^x\{y\cos y + (x+1)\sin y\}$$

$$f_{yy} = -e^x\{\cos y - y\sin y + (x+1)\cos y\} = -e^x\{(x+2)\cos y - y\sin y\}$$

であるから $f_{xx} + f_{yy} = 0$ となる．

問 4.19

(1)

$$f_x(x,\ y) = 4x + y - 2 \qquad f_y(x,\ y) = x - 6y + 5$$

$$f_{xx}(x,\ y) = 4 \qquad f_{xy}(x,\ y) = f_{yx}(x,\ y) = 1 \qquad f_{yy}(x,\ y) = -6$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = 0 \qquad (n \geq 3,\ 0 \leq k \leq n)$$

であるから

$$\begin{aligned}
f(x,\ y) &= f(a,\ b) + f_x(a,\ b)(x-a) + f_y(a,\ b)(y-b) \\
&\quad + \frac{1}{2}\{f_{xx}(a,\ b)(x-a)^2 + f_{yy}(a,\ b)(y-b)^2\} \\
&\quad + f_{xy}(a,\ b)(x-a)(y-b) \\
&= 2a^2 + ab - 3b^2 - 2a + 5b + 1 \\
&\quad + (4a + b - 2)(x-a) + (a - 6b + 5)(y-b) \\
&\quad + 2(x-a)^2 + (x-a)(y-b) - 3(y-b)^2
\end{aligned}$$

となる．

(2)

$$f_x(x,\ y) = e^{x+y} \qquad f_y(x,\ y) = e^{x+y}$$

であるから

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = e^{x+y}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}
f(x,\ y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^r f(a,\ b) \\
&= e^{a+b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(x-a) + (y-b)\}^n}{n!}
\end{aligned}$$

問 4.20

(1) $f(x,\ y) = x^3y^3 + y - x$ とおく．$f_x = 3x^2y^3 - 1$，$f_y = 3x^3y^2 + 1$ であるから $f_y \neq 0$ として

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y^3 - 1}{3x^3y^2 + 1}$$

を得る．

(2) $f(x,\ y) = x^y - y^x$ とおく．$f_x = yx^{y-1} - \log y y^x$，$f_y = \log x x^y - xy^{x-1}$ であるから $f_y \neq 0$ として

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1} - y^x \log y}{xy^{x-1} - x^y \log x}$$

を得る．

問 4.21

(1) $f_x = 3x^2 - 3y$，$f_y = 3y^2 - 3x$ である．$f_x = f_y = 0$ より $x = y^2 = x^4$ となるので，停留点は $(0,\ 0)$ と $(1,\ 1)$ である．$f_{xx} = 6x$，$f_{yy} = 6y$，$f_{xy} = -3$ である．

$$H(0,\ 0) = f_{xx}(0,\ 0)f_{yy}(0,\ 0) - \{f_{xy}(0,\ 0)\}^2 = 0 \cdot 0 - 9 < 0$$

であるから $(0,\ 0)$ で極値はとらない．

$$H(1,\ 1) = f_{xx}(1,\ 1)f_{yy}(1,\ 1) - \{f_{xy}(1,\ 1)\}^2 = 6 \cdot 6 - 9 > 0$$

であり，$f_{xx}(1,\ 1) = 6 > 0$ であるから $(1,\ 1)$ で極小値 $f(1,\ 1) = -1$ をとる．

(2)

$$f_x = \frac{2x}{1+y^2} \qquad\qquad f_y = \frac{1-2x^2y-y^2}{(1+y^2)^2}$$

である．$f_x = f_y = 0$ より停留点は $(0,\ -1)$ と $(0,\ 1)$ となる．

$$f_{xx} = \frac{2}{1+y^2} \qquad f_{yy} = -2\frac{(1-3y^2)x^2+y(3-y^2)}{(1+y^2)^3}$$

$$f_{xy} = -\frac{4xy}{(1+y^2)^2}$$

である．これより

$$\begin{aligned} H(0,\ -1) &= f_{xx}(0,\ -1)f_{yy}(0,\ -1) - \{f_{xy}(0,\ -1)\}^2 \\ &= 1\cdot\frac{1}{2} - 0 > 0, \end{aligned}$$

かつ $f_{xx}(0,\ -1) = 1 > 0$ であるから $(0,\ -1)$ で極小値 $f(0,\ 1) = \dfrac{1}{2}$ をとる．

$$H(0,\ 1) = f_{xx}(0,\ 1)f_{yy}(0,\ 1) - \{f_{xy}(0,\ 1)\}^2 = 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 0 < 0$$

となるので極値をとらない．

(3) $f_x = \{1-2x(x+y)\}e^{-x^2-y^2}$，$f_y = \{1-2y(x+y)\}e^{-x^2-y^2}$ である．$f_x = f_y = 0$ より $x = y$，$x^2 = y^2 = \dfrac{1}{4}$ となるので，停留点は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ と $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ である．$f_{xx} = (4x^3+4yx^2-6x-2y)e^{-x^2-y^2}$，$f_{yy} = (4y^3+4xy^2-6y-2x)e^{-x^2-y^2}$，$f_{xy} = 2(x+y)(2xy-1)e^{-x^2-y^2}$ である．これより

$$\begin{aligned} H\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) &= f_{xx}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)f_{yy}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) - \left\{f_{xy}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\right\}^2 \\ &= \left(-3e^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(-3e^{-\frac{1}{2}}\right) - \left(-e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 > 0, \end{aligned}$$

かつ $f_{xx}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) < 0$ であるから $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ で極大値 $f\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$ をとる．

$$\begin{aligned} H\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right) &= f_{xx}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right) f_{yy}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right) \\ &\qquad\qquad - \left\{f_{xy}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)\right\}^2 \\ &= 3e^{-\frac{1}{2}} \cdot 3e^{-\frac{1}{2}} - \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 > 0, \end{aligned}$$

かつ $f_{xx}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right) > 0$ であるから $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ で極小値 $f\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{2}}$ をとる．

問 4.22 $z = \dfrac{a-x-2y}{3}$ となる．このとき $0 < x < a$，$0 < y < \dfrac{a}{2}$，$0 < x+2y < a$ となる．この 3 つの不等式は xy 平面上の三角形に囲まれた閉領域 K となる．

$$x^3y^2z = f(x,\ y) = \frac{x^3y^2(a-x-2y)}{3}$$

とおく．

$$f_x = \frac{x^2y^2(3a-4x-6y)}{3} \qquad f_y = \frac{2x^3y(a-x-3y)}{3}$$

であるから，$f_x = f_y = 0$ を満たす K の内点は $(x,\ y) = \left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{6}\right)$ だけである．さらに

$$f_{xx} = \frac{2xy^2(3a-4x-6y) - 4x^2y^2}{3} \qquad f_{yy} = \frac{2x^3(a-x-3y) - 6x^3y}{3}$$

$$f_{xy} = \frac{2x^2y(3a-4x-6y)-6x^2y^2}{3}$$

となるから

$$\begin{aligned}
H\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{6}\right) &= f_{xx}\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{6}\right)f_{yy}\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{6}\right) - \left\{f_{xy}\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{6}\right)\right\}^2 \\
&= \left\{-\frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{a}{6}\right)^2\right\}\cdot\left\{-2\left(\frac{a}{2}\right)^3\left(\frac{a}{6}\right)\right\} \\
&\quad - \left\{-2\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{a}{6}\right)^2\right\}^2 > 0
\end{aligned}$$

を得る．さらに $f_{xx}\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{6}\right) < 0$ であるから，$\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{6}\right)$ で極大値をとる．また，K の境界上で f は 0 であるから，$\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{6}\right)$ で最大値

$$f\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{6}\right) = \frac{a^6}{2^6\cdot 3^4}$$

をとる．

問 4.23　$x^2+y^2=1$ であるから，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ $(-\pi\leq\theta\leq\pi)$ とおける．$F(\theta)=f(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とする．

$$F(\theta) = 3\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta = \cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta + 2$$

となる．これを θ について微分すると $F'(\theta) = -2\sin 2\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta$ を得る．$F'(\theta)=0$ より，$\theta = -\frac{5}{6}\pi,\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi$ を得る．増減表より，$\theta = -\frac{5}{6}\pi,\ \frac{\pi}{6}$ で極大値 $F\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$ をとり，$\theta = -\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$ で極小値 $F\left(-\frac{\pi}{3}\pi\right) = F\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 0$ をとることがわかる．

問 4.24 $g(x,\ y) = (x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$ とおき，$\Phi(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y)-\lambda g(x,\ y)$ とする．

$$g_x = 4x(x^2+y^2-1) \qquad g_y = 4y(x^2+y^2+1)$$

であるから

$$\begin{aligned}\Phi_x(x,\ y,\ \lambda) &= 2x\{1-2\lambda(x^2+y^2-1)\} = 0\\ \Phi_y(x,\ y,\ \lambda) &= 2y\{1-2\lambda(x^2+y^2+1)\} = 0\\ g(x,\ y) &= 0\end{aligned}$$

となる．これらを解いて，極値の候補 $(x,\ y) = (0,\ 0)$，$(\pm\sqrt{2},\ 0)$ を得る．

$f(x,\ y) \geq 0$ であり，$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ に対して $f(x,\ y) > 0$ であるから $(x,\ y) = (0,\ 0)$ で極小値 0 をとる．

$g_x(\sqrt{2},\ 0) = 4\sqrt{2} \neq 0$，$g_y(\sqrt{2},\ 0) = 0$ であるから，陰関数の定理により $(\sqrt{2},\ 0)$ を横切る曲線 $g(x,\ y) = 0$ の x は y の関数として表すことができる．ここで $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ と表すと $g(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = r^4-2r^2\cos 2\theta = 0$ となるので $r^2 = 2\cos\theta$ を得る．
$(\sqrt{2},\ 0) = (\sqrt{2}\cos 0,\ \sqrt{2}\sin 0)$ であるから，θ は 0 の近傍で変化する．一方，$f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = r^2$ であるから，極形式から得られた g の式により，$(\sqrt{2},\ 0)$ で極大値 2 をとることがわかる．$(-\sqrt{2},\ 0)$ についても同様にして極大値 2 をとることがわかる．

第 5 章

問 5.1 $D = \{(x,y)\,|\,-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$
$= \{(x,y)\,|\,0 \leq y \leq 1,\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$.

問 5.2　(1) $\dfrac{7}{6}$　(2) $e-2$　(3) $\dfrac{8}{15}$

問 5.3　(1) $\dfrac{2}{15}$　(2) 1　(3) $\dfrac{1}{2}(e-1)$　(4) $\dfrac{1}{45}$

問 5.4　(1) $\displaystyle\int_0^{e^{-1}} dy \int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx + \int_{e^{-1}}^{e} dy \int_{\log y}^{1} f(x,y)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\alpha a} dy \int_{y/\beta}^{y/\alpha} f(x,y)\,dx + \int_{\alpha a}^{\beta a} dy \int_{y/\beta}^{a} f(x,y)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{a} dx \int_{a}^{x+a} f(x,y)\,dy + \int_{a}^{2a} dx \int_{a}^{2a} f(x,y)\,dy + \int_{2a}^{3a} dx \int_{x-a}^{2a} f(x,y)\,dy$

(4) $\displaystyle\int_0^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{4} dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$

問 5.5　（ヒント：D は $\boldsymbol{a}=(ak,ck)$, $\boldsymbol{b}=(ch,dh)$ で張られる平行四辺形である.）

問 5.6　$\dfrac{1}{16}(3e^4+5e^{-4})$

問 5.7　(1) $\dfrac{2\pi}{3}a^3$　(2) $\dfrac{\pi}{4}(e^{a^2}-1)$　(3) $\dfrac{a^4}{24}$（ヒント：変数変換 $x=\dfrac{a}{2}+r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を利用する.）

問 5.8　(1) $\dfrac{1}{2}$（ヒント：$D_n : x+y \leq n,\ x,y \geq 0$）

(2) $\log(1+\sqrt{2})$（ヒント：$D_n : 0 \leq y \leq x \leq 1,\ x \geq \dfrac{1}{n}$）

(3) $\log\dfrac{b}{a}$（ヒント：$D_n : x \geq 0,\ a \leq y \leq b,\ xy \leq n$ とし,

$\displaystyle\iint_{D_n} e^{-xy}dx\,dy = \int_a^b dy \int_0^{\frac{n}{y}} e^{-xy}dx$ を計算する.）

問 5.9
(1) $\dfrac{1}{2}e^2 - e$ (2) $2\pi a^2$ (3) $\dfrac{\pi}{4}a^4$ （ヒント：(2)，(3) では空間の極座標を利用する.）

問 5.10 $\dfrac{4\pi}{3}abc$

問 5.11 （ヒント：$0 < t < \min\{a, b\}$, $D' = \{(x, y) \,|\, t \leq x \leq a,\ t \leq y \leq b\}$ とし，$\displaystyle\iint_{D'} f(x)g(y)\,dx\,dy$ を調べる.）

問 5.12 （ヒント：変数変換 $u = x^2$ を利用する.）

問 5.13 （ヒント：関数 $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ を考え，$\displaystyle\iint_{D(a)} f(x, y)\,dx\,dy$, $\displaystyle\iint_{E(a)} f(x, y)\,dx\,dy$ を調べる.）

第6章

問 6.1 与えられた方程式を変形すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y$$

となるから，この方程式は例題 6.1 でいう

$$f(x) = \frac{2}{x}, \qquad g(y) = y$$

の場合の変数分離形である．したがって，求める一般解は C を任意定数として

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2}{x}\,dx + C$$

で与えられる．これより

$$\log|y| = 2\log|x| + C, \qquad |y| = e^C x^2, \qquad y = \pm e^C x^2$$

を得る．ここで，$\pm e^C$ を改めて C と書けば，C を任意定数とする一般解

$$y = Cx^2$$

が得られた．

問 6.2　例題 6.1 より，求める一般解は，C を任意定数として

$$\int \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}\, dy = \int dx + C, \qquad y^{\frac{1}{3}} = x + C$$

で与えられる．これを簡単にして，一般解は次の形

$$y = (x + C)^3$$

で与えることもできる．ところで，解はこれだけであろうか．容易に確かめることができるように $y = 0$ も解である．しかしこの解は，上の一般解の C にどんな数値を代入しても得ることはできない．したがって，$y = 0$ は与えられた微分方程式の特異解なのである。

問 6.3　与えられた微分方程式を

$$y' = \pm\sqrt{1 - y^2}$$

と変形すると，例題 6.1 により，C を任意定数として，一般解

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\, dy = \pm \int dx + C$$

が得られる．これより，次の形の一般解

$$\sin^{-1} y = \pm x + C, \qquad y = \sin(\pm x + C) = \pm \sin(x \pm C)$$

を得る．ところで， $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$ であるから，上の式で $\pm C$ を改めて C と書き直すと，求める一般解

$$y = \sin(x + C)$$

を得る．ところで，明らかに $y = \pm 1$ も元の方程式の解である．しかしこの解は上の一般解の C にどのような値を代入しても得られない．すなわち，$y = \pm 1$ は元の方程式の特異解なのである．

問 6.4　例題 6.2 で $p(x) = a$, $q(x) = b$ とおく．このとき，$a = 0$ のときは $y' = b$ となるから，この両辺を積分して $y = bx + C$ を得る．次に，$a \neq 0$ のときには例題 6.2 から直ちに $y = \dfrac{b}{a} + Ce^{-ax}$ を得る．ここでいづれの場合にも，C は任意定数である．

問 6.5　例題 6.2 で $p(x) = 2x$, $q(x) = 2x$ とおけば，$\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2}2x$ であることに注意して

$$y = e^{-x^2}\left(\int e^{x^2}2xdx + C\right) = e^{-x^2}(e^{x^2} + C) = 1 + Ce^{-x^2}$$

が得られる．ここで，C は任意定数である．

問 6.6　前半は例題 6.2 から明らかである．後半を示そう．C_1, C_2 は $C_1 \neq C_2$ なる定数とし，これらに対応する特殊解 y_1, y_2 をそれぞれ

$$y_1 = C_1 f(x) + g(x), \qquad y_2 = C_2 f(x) + g(x)$$

とする．このとき $y_1 - y_2 = (C_1 - C_2)f(x)$ であるから

$$(y_1 - y_2)' + p(x)(y_1 - y_2) = (C_1 - C_2)f'(x) + (C_1 - C_2)p(x)f(x) = 0$$

が得られる．したがって，

$$f'(x) + p(x)f(x) = 0$$

が成り立つ．よって，ある定数 B が存在して

$$f(x) = Be^{-\int p(x)\,dx}$$

となる．これより，C を任意定数として

$$Cf(x) = CBe^{-\int p(x)dx}$$

となることから，$Cf(x)$ は斉次方程式の一般解となることがわかった．ここで，CB を改めて C と書くことにより

$$y = Ce^{-\int p(x)de} + g(x)$$

が得られるから，これを元の非斉次方程式に代入すると

$$g'(x) + p(x)g(x) = q(x)$$

が得られ，これより $g(x)$ は元の方程式の解となることも分かった．

問 6.7　前半は，$1 \leq i,\, j \leq 3$ なる任意の整数 $i,\, j$ に対し

$$y_i - y_j = (C_i - C_j)f(x)$$

が成り立つことから分かる．後半を示そう．C を任意定数とし，$C_1,\, C_2$ を与えられた定数とする．このとき，$i = 1,\, 2$ に対して

$$y = Cf(x) + g(x), \qquad y_i(x) = C_if(x) + g(x)$$

であるから

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{C - C_1}{C_2 - C_1}$$

が成り立つ．ここで，$(C - C_1)/(C_2 - C_1)$ を改めて C と書き直すと

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = C, \qquad y = C(y_2 - y_1) + y_1$$

なる一般解が得られる．

問 6.8　次の関係式

$$\left(e^{\int p(x)\,dx}\right)' = p(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

が成り立つことから，明らかである．

問 6.9　初めに，斉次方程式 $y' + p(x)y = 0$ の一般解は，例題 6.2 より C を任意定数として

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

で与えられる．**定数変化法**とは，任意定数 C を x の関数 $C(x)$ と見なして

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}$$

が元の非斉次方程式の解となるように，$C(x)$ を定めて一般解を求めようとする考え方である．これを以下具体的に示してみよう．まず，上で与えた y を微分すると

$$y' = \{C'(x) - C(x)p(x)\}\,e^{-\int p(x)\,dx} = C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} - p(x)y$$

となるから，y と上の y' とを元の非斉次方程式に代入して整理すると

$$C'(x) = e^{\int p(x)\,dx}, \qquad C(x) = \int e^{\int p(x)\,dx}q(x) + C_1$$

を得る．ここで，C_1 は積分定数，つまり微分方程式の立場から言えば任意定数である．これを

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}$$

に代入し，C_1 を C と書き直すと，一般解

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left\{\int e^{\int p(x)\,dx}\,q(x)dx + C\right\}$$

が得られる．以上の解法は **Lagrange(ラグランジュ) の定数変化法**と呼ばれ，1 階の微分方程式ばかりでなく，さらに高階の微分方程式や連立微分方程式の解法に対しても威力を発揮する．なお，2 階の線形微分方程式に関しては，例題 6.12 で定数変化法による解法を示しておいた．

問 6.10　与えられた非斉次方程式の特殊解 y_1 は，例題 6.2 で与えた一般解で $C = C_1$ とおくことにより

$$y_1 = C_1 e^{-\int p(x)\,dx} + \int e^{-\int p(x)\,dx} \int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx$$

と書くことができる．いま，与えられた非斉次方程式の任意の解を y とし，$\varphi(x)$ を

$$\varphi(x) = e^{-\int p(x)\,dx}$$

とおけば，容易に確かめることができるように $y - y_1$ と φ とはともに斉次方程式 $y' + p(x)y = 0$ の解となる．したがって，

$$\left(\frac{y(x) - y_1(x)}{\varphi(x)}\right)' = 0$$

が成り立つ．これより，積分定数を C とおけば

$$y(x) - y_1(x) = C\varphi(x)$$

が成り立つ．よって，y は

$$\begin{aligned} y &= (C_1 + C)e^{-\int p(x)\,dx} + \int e^{-\int p(x)\,dx} \int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx \\ &= e^{-\int p(x)\,dx} \left\{ \int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx + C_1 + C \right\} \end{aligned}$$

と書くことができる．これは，例題 6.2 で任意定数 C を $C_1 + C$ とおいたものに他ならない．したがって，C は任意定数であることを考慮して，与えられた微分方程式は特異解をもち得ないことが分かった。

問 6.11　与えられた斉次方程式の一般解は，C を任意定数として

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

で与えられる．問 6.10 によると，この方程式には特異解は存在しないので，2 つの解 y_1, y_2 は，それぞれ定数 C_1, C_2 が存在して

$$y_1 = C_1 e^{-\int p(x)\,dx}, \qquad y_2 = C_2 e^{-\int p(x)\,dx}$$

と書き表すことができる．これより，解答が得られる．

問 6.12　代入して直ぐ分かるように $y = y_1 = x^2$ は 1 つの解である．しかも $p(x) = x^{-1}$ であるから

$$e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-\log x} = x^{-1}$$

を得る．よって，元の方程式に付随する斉次方程式の一般解は Cx^{-1} となって，例題 6.3 より求める一般解は，C を任意定数として

$$y = \frac{C}{x} + x^2$$

で与えられる．

問 6.13　前半を示そう．y_1, y_2 が共に微分方程式の解であるから

$$(y_2 - y_1) + p(x)(y_2 - y_1) = 0$$

が成り立つ．したがって，例題 6.3 よりある定数 B が存在して

$$y_2 - y_1 = Be^{-\int p(x)\,dx}$$

が成り立つ．ところが，ある $x = x_0$ に対して $y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0$ であるのだから，$B = 0$ でなければならない．したがって，$y_1 \equiv y_2$ となる．

次に，後半を示そう．もしある点 $x = p \in I$ で $y_1(p) = y_2(p)$ であったとすると，前半の結果により $y_1 \equiv y_2$ となって初めの仮定 $y_1(x_0) < y_2(x_0)$ に反する．また，$y_1(p) > y_2(p)$ となったとすれば中間値の定理により，ある点 $x = q \in I$ で $y_1(q) = y_2(q)$ が成り立つ．よって，前半の結果により $y_1(x) \equiv y_2(x)$ となるが，これも初めの仮定 $y_1(x_0) < y_2(x_0)$ に反する．したがって，任意の $x \in I$ に対して $y_1(x) < y_2(x)$ でなければならない．

問 6.14　y_1, y_2 を異なる 2 つの解とする．このとき

$$(y_2 - y_1) + p(x)(y_2 - y_1) = 0$$

となるから，ある定数 B が存在して

$$y_2 - y_1 = Be^{-\int p(x)\,dx}$$

となる．ここで，$y_1 \neq y_2$ であるから，問 6.8 より $B \neq 0$ となる．他方，未知関数 y を $z = y - y_1$ とおけば z に関する斉次微分方程式

$$z' + p(x)z = 0$$

が得られる．これを解けば，C を任意定数として

$$z = y - y_1 = Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

を得る．これと上で得られた結果とにより

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{C}{B}$$

が成り立つ．ここで，$\dfrac{C}{B}$ を改めて任意定数 C と書くことができるから

$$y = C(y_2 - y_1) + y_1$$

が得られる．

問 6.15 与えられた方程式を $y' + x^{-1}y = x^2y^3$ と変形すると，Bernoulli の微分方程式で $p(x) = x^{-1}$, $q(x) = x^2$ の場合となる．よって，例題 6.3 で $a = 3$ とおいてこの方程式解くと，C を任意定数として

$$\begin{aligned} y^{-2} &= e^{2\int x^{-1}\,dx}\left(-2\int e^{-2\int x^{-1}\,dx}x^2\,dx + C\right) \\ &= x^2\left(-2\int x^{-2}x^2\,dx + C\right) \\ &= x^2(-2x + C) = -2x^3 + Cx^2 \end{aligned}$$

が得られる．したがって，$(2x - C)x^2y^2 = 0$ が求める一般解となる．

問 6.16 与えられた方程式の両辺を x で割ると

$$y' + x^{-1}y = y^2x^{-1}\log x$$

が得られる．これは $a = 2$, $p(x) = x^{-1}$, $q(x) = x^{-1}\log x$ となる Bernoulli の微分方程式である．ここで

$$\begin{aligned} &e^{-\int -x^{-1}\,dx} = e^{\int x^{-1}\,dx} = e^{\log x} = x \\ &-\int x^{-2}\log x\,dx = x^{-1}\log x - \int x^{-2}\,dx = x^{-1}\log x + x^{-1} \end{aligned}$$

であるから，例題 6.4 より

$$y^{-1} = x(x^{-1} + x^{-1}\log x + C) = 1 + \log x + Cx$$

を得る．したがって，求める一般解は C を任意定数として

$$y = \frac{1}{1 + \log x + Cx}$$

となる．

問 6.17　例題 6.4 で与えられた一般解の両辺を x に関して微分すると

$$\begin{aligned}(1-a)y^{-a}y' = &-(1-a)p(x)y^{1-a}\\ &+ e^{-\int(1-a)p(x)\,dx}e^{\int(1-a)p(x)\,dx}(1-a)q(x)\end{aligned}$$

が成り立つ．この両辺に $(1-a)^{-1}y^a$ を掛けて整理すると Bernoulli の微分方程式が得られる．

問 6.18　$y = z + x$ と従属変数を y から z へと変数変換をすれば，初めの方程式は z に関する Bernoulli の方程式

$$z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}z^2$$

となる．これは，例題 6.4 で $a = 2,\ p(x) = q(x) = \dfrac{1}{x}$ の場合であるから，C を任意定数として，例題 6.4 で与えた一般解により

$$\begin{aligned}z^{-1} &= e^{\int \frac{1}{x}\,dx}\left(-\int e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\frac{1}{x}\,dx + C\right)\\ &= x\left(-\int \frac{1}{x^2}dx + C\right) = 1 + Cx\end{aligned}$$

を得る．これより求める一般解は

$$y = x + \frac{1}{1+Cx} = \frac{x+1+Cx^2}{1+Cx}$$

となる．

問 6.19　例題 6.5 で与えた解の表示式から分かるように，y_1 を Riccati の方程式の 1 つの解とするとき，この方程式の一般解 y は，C を任意定数として

$$y = y_1 + \frac{1}{Cg_1(x) + g_2(x)} = \frac{Cy_1g_1(x) + (y_1g_2(x)+1)}{Cg_1(x) + g_2(x) + 1}$$

なる形で表現できる．ここで，例題 6.5 から分かるように，常に $g_1(x) > 0$ であることに注意すると

$$y_1 g_1(x) g_2(x) - g_1(x)(y_1 g_2(x) + 1) = g_1(x) > 0$$

が成り立つ．これで，前半が証明された．

次に，後半を証明する．与えられた一般解の式を任意定数 C に関して解けば

$$C = \frac{-f_4(x)y + f_2(x)}{f_3(x)y - f_1(x)}$$

を得る．この両辺を x に関して微分し，これを整理すれば，y の微分方程式

$$(f_1 f_4 - f_2 f_3)y' + (f_1' f_2 - f_1 f_2') + (f_1 f_4' - f_2 f_3')y + (f_3' f_4 - f_3 f_4')y^2 = 0$$

を得る．条件より $f_1(x)f_4(x) \neq f_2(x)f_3(x)$ であるから，これは確かに Riccati の微分方程式である．

問 6.20　簡単な計算により

$$y_i - y_j = \frac{(C_i - C_j)(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{(f_i f_3 + f_4)(C_j f_3 + f_4)}$$

が得られる．したがって

$$y_1 - y_3 = \frac{(C_1 - C_3)(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{(C_1 f_3 + f_4)(C_3 f_3 + f_4)}, \quad y_2 - y_3 = \frac{(C_2 - C_3)(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{(C_2 f_3 + f_4)(C_3 f_3 + f_4)}$$
$$y_2 - y_3 = \frac{(C_2 - C_3)(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{(C_2 f_3 + f_4)(C_3 f_3 + f_4)}, \quad y_2 - y_4 = \frac{(C_2 - C_4)(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{(C_2 f_3 + f_4)(C_4 f_3 + f_4)}$$

を得る．これより目指す等式が得られた．

問 6.21　y を Riccati の方程式の任意の解とする．このとき，問 6.19 で与えた形の y と問 6.20 で与えた y_i に対し，問 6.20 の結論により

$$\frac{y-y_2}{y_1-y_2}\Bigg/\frac{y-y_3}{y_1-y_3}=\frac{C-C_2}{C_1-C_2}\Bigg/\frac{C-C_3}{C_1-C_3}$$

が得られる．したがって，y は 1 つの任意定数 C と 3 つの既知関数 y_1, y_2, y_3 で表されたから，これは Riccati の方程式の一般解である．

問 6.22　まず，容易に確かめることができる y_1, y_2 が Riccati の微分方程式の解ならば

$$(y_2-y_1)'+\{q(x)+2r(x)y_1(x)\}(y_2-y_1)+r(x)(y_2-y_1)^2=0$$

が成り立つことに注意する．この両辺を $-(y_2-y_1)^2$ で割れば

$$\left(\frac{1}{y_2-y_1}\right)'-\{q(x)+2r(x)y_1(x)\}\frac{1}{y_2-y_2}=r(x)$$

を得る．いま，$y=z+y_1$ と未知関数 y から未知関数 z へと変換すると，z に関する Bernoulli の微分方程式

$$z'+\{q(x)+2r(x)y_1(x)\}z=-r(x)z^2$$

が得られる．この両辺を $-z^2$ で割ると

$$\left(\frac{1}{z}\right)'-\{q(x)+2r(x)y_1(x)\}\frac{1}{z}=r(x)$$

を得る．したがって，$z=y-y_1$ であることに注意すると

$$\left(\frac{1}{y-y_1}\right)'-\{q(x)+2r(x)y_1(x)\}\frac{1}{y-y_1}=r(x)$$

が得られる．これと上で与えた $\dfrac{1}{y_2-y_1}$ の満たす微分関係式とにより

$$\left(\frac{1}{y-y_1}-\frac{1}{y_2-y_1}\right)'-\{q(x)+2r(x)y_1(x)\}\left(\frac{1}{y-y_1}-\frac{1}{y_2-y_1}\right)=0$$

なる微分方程式を得る．これを例題 6.2 にしたがって解けば，C を任意定数として

$$\frac{1}{y-y_1}-\frac{1}{y_2-y_1}=Ce^{\int\{q(x)+2r(x)y_1(x)\}\,dx}$$

を得る．したがって，Riccati の方程式の 2 つの解 $y_1,\,y_2$ がわかれば 1 回の不定積分で一般解 y を求めることができた．

問 6.23　与えられた変換式の両辺を x に関して微分すると

$$y'=-\frac{r'(x)}{r(x)^2}\frac{z'}{z}+\frac{1}{r(x)}\frac{z''-z'^2}{z^2}$$

となるから，変換式の y と上で得た y' とを元の Riccati の方程式に代入すると

$$-\frac{r'(x)}{r(x)^2}+\frac{1}{r(x)}\frac{z''z-z'^2}{z^2}+p(x)+q(x)\frac{1}{r(x)}\frac{z'}{z}+\frac{1}{r(x)^2}\frac{z'^2}{z^2}=0$$

を得る．この両辺に $r(x)z$ を掛けて，これを整理すると目指す 2 階斉次線形微分方程式が得られる．

問 6.24　$W[f_1,\ f_2]$ を $x\geq 0$ と $x<0$ の場合に分けて計算すると

$$x\geq 0 \implies W=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x)\\ f_1'(x) & f_2'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2 & 0\\ 2x & 0\end{vmatrix}=0$$

$$x<0 \implies W=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x)\\ f_1'(x) & f_2'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & x^2\\ 0 & 2x\end{vmatrix}=0$$

が成り立つから，$W[f_1,\ f_2] \equiv 0$ を得る．次に，f_1, f_2 が 1 次独立であることを示そう．いま，C_1, C_2 を実定数とし

$$g(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \equiv 0$$

が成り立っているとする．このとき，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ の定め方から

$$g(1) = C_1 f_1(1) + C_2 f(1) = C_1 + 0 = 0$$

$$g(-1) = C_1 f(-1) + C_2 f(-1) = 0 + C_2 = 0$$

が成り立つから $C_1 = C_2 = 0$ が得られ，1 次独立性が示された．

問 6.25　2 次方程式の解と係数の関係より

$$2\lambda_0 = -a, \qquad \lambda_0^2 = b$$

であるから，次の一連の式

$$\begin{aligned}(D-\lambda_0)^2 y &= (D-\lambda_0)(Dy-\lambda_0 y)\\ &= D(y'-\lambda_0 y) - \lambda_0(y'-\lambda_0 y)\\ &= y'' - \lambda_0 y' - \lambda_0 y' + \lambda_0^2 y\\ &= y'' - 2\lambda_0 y' + \lambda_0^2 y\\ &= y'' + ay' + by = L(y)\end{aligned}$$

が得られる．

問 6.26　最初の等式は

$$(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)y = \{D^2 - (\lambda_1+\lambda_2)D + \lambda_1\lambda_2\}y$$
$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = \{D^2 - (\lambda_2+\lambda_1)D + \lambda_2\lambda_1\}y$$

が成り立つことからわかる．次の等式は

$$(D-\lambda_1)e^{\lambda_1 x} = (e^{\lambda_1 x})' - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} = 0$$

が成り立つことからわかる．3 番目の等式は 2 番目の等式から自明である．そして，最後の等式も 2 番目の等式から明らかである．

問 6.27 例題 6.7 の最初の等式により

$$\begin{aligned}(D-\lambda_0)^2 e^{\lambda_0 x} y &= (D-\lambda_0)\{(D-\lambda_0)e^{\lambda_0 x} y\} \\ &= (D-\lambda_0)\{e^{\lambda_0 x} Dy\} = e^{\lambda_0 x} D^2 y\end{aligned}$$

が成り立つことからわかる．

問 6.28 例題 6.8 の最初の等式を示したのと同様にして

$$(D-\lambda_0)^2 y = (D-\lambda_0)^2 e^{\lambda_0 x} e^{-\lambda_0 x} y = e^{\lambda_0 x} D^2 e^{-\lambda_0 x} y$$

が成り立つことからわかる．3 番目の等式も上で示した考え方と同様にして示すことができる．

問 6.29 この微分方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2 = 0$$

であるから，例題 6.9 で $\lambda_0 = -3$ に相当する．したがって，C_1, C_2 を任意定数として，求める一般解は

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$$

で与えられる．

問 6.30　この微分方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

であるから，例題 6.9 で $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ に相当する．したがって，C_1, C_2 を任意定数として，求める一般解は

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

で与えられる．

問 6.31　これら 2 つの関数の Wronskian を W とおくと

$$W = \begin{vmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{vmatrix} = e^{-6x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ -3 & 1-3x \end{vmatrix} = e^{-6x} > 0$$

であるから，2 つの特殊解 e^{-3x}, xe^{-3x} は互いに 1 次独立である．

問 6.32　これら 2 つの関数の Wronskian を W とおくと

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{5x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = e^{5x} > 0$$

であるから，2 つの特殊解 e^{2x}, e^{3x} は互いに 1 次独立である．

問 6.33　まず，例題 6.10 により

$$p = -\frac{a}{2}, \qquad q = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

であるから $p^2 - q^2 + ap + b = 2p + a = 0$ が成り立つ．次に，やや面倒な計算を頑張って実行すると

$$L(e^{px}\cos qx) = e^{px}(p^2 - q^2 + ap + b)\cos qx - e^{px}q(2p + a)\sin qx = 0$$
$$L(e^{px}\sin qx) = e^{px}q(2p + a)\cos qx + e^{px}(p^2 - q^2 + ap + b)\sin qx = 0$$

が得られる．これより

$$\begin{aligned}L(y) &= L(C_1e^{px}\cos qx + C_2e^{px}\sin qx)\\ &= C_1L(e^{px}\cos qx) + C_2L(e^{px}\sin qx)\\ &= C_10 + C_20 = 0\end{aligned}$$

が得られる．

問 6.34　この場合の特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ となるから，例題 6.10 においては $a = -2,\ b = 5$ となり，したがって $p = 1,\ q = 2$ となる．よって，求める一般解は，$C_1,\ C_2$ を任意定数として

$$y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^x$$

となる．

問 6.35　この関数系の Wronskian を W とおくと，$q \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned}W &= \begin{vmatrix} e^{px}\cos qx & e^{px}\sin qx \\ pe^{px}\cos qx - qe^{px}\sin qx & pe^{px}\sin qx + q\cos qx \end{vmatrix}\\ &= e^{2px}\begin{vmatrix} \cos qx & \sin qx \\ -q\sin qx & q\cos qx \end{vmatrix} = qe^{2px} \neq 0\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，この関数系は 1 次独立系である．

問 6.36　まず，$L(y) = \sin x$ の特殊解を求めるために，$c_1,\ c_2$ を定数としてこの方程式の解を $y = c_1\cos x + c_2\sin x$ とおいてみる．このとき

$$y' = -c_1\sin x + c_2\cos x, \qquad y'' = -y$$

となるから

$$L(y) = -4y' + 2y = (2c_1 - 4c_2)\cos x + (4c_1 + 2c_2)\sin x = \sin x$$

が成り立つ．よって，この最後の等式の $\sin x$ と $\cos x$ の係数を比較して

$$2c_1 - 4c_2 = 0, \qquad 4c_1 + 2c_2 = 1$$

を得る．この連立式を解けば，c_1, c_2 と $L(y) = \sin x$ の特殊解 y_2 とは

$$c_1 = \frac{2}{10}, \quad c_2 = \frac{1}{10}, \quad y_2 = \frac{1}{10}(2\cos x + \sin x)$$

で与えられる．他方，斉次方程式 $L(y) = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

であるから $L(y) = 0$ の一般解は $y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ と表される．ここで，C_1, C_2 は任意定数である．したがって，求める一般解 $y = y_1 + y_2$ は

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{10}(2\cos x + \sin x)$$

で与えられる．

問 6.37　まず，微分方程式 $L(y) = x^2$ の特殊解を求めるために，c_1, c_2, c_3 を定数として $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ とおく．これを与えられた方程式に代入して整理すると $(-3c_1 - 2c_2 + 2c_3) - (3c_2 + 4c_3)x - 3c_3 x^2 = x^2$ が得られる．これより

$$-3c_1 - 2c_2 + 2c_3 = 0, \quad 3c_2 + 4c_3 = 0, \quad -3c_3 = 1$$

を得る．この連立方程式を解けば

$$c_1 = -\frac{14}{27}, \quad c_2 = \frac{4}{9}, \quad c_3 = -\frac{1}{3}$$

が得られる．他方，$L(y)=0$ の特性方程式は

$$\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$$

であるから，求める一般解は

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{14}{27}+\frac{4}{9}x-\frac{1}{3}x^2$$

で与えられる．

問 6.38　微分方程式 $L(y)=e^{2x}$ の特殊解を求めるために，c を定数として $y=cxe^{2x}$ とおく．このとき

$$y=ce^{2x},\quad y'=c(1+2x)e^{2x},\quad y''=4c(1+x)e^{2x}$$

となるから，これらを与えられた方程式に代入して整理すると $ce^{2x}=e^{2x}$ を得る．したがって，$c=1$ となり $y=xe^{2x}$ が与えられた微分方程式の特殊解となる．他方，$L(y)=0$ の特性方程式は

$$\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

であるから，求める一般解は C_1, C_2 を任意定数として

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+xe^{2x}$$

で与えられる．

問 6.39　目指すは $y_3=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$ とおいたとき，$L(y_3)=r(x)$ となることを示せばよい．まず

$$C_1(x)=\int\frac{-r(x)y_2(x)}{W(x)}\,dx,\qquad C_2(x)=\int\frac{r(x)y_1(x)}{W(x)}\,dx$$

であることに注意する．このとき

$$y_3' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2', \qquad y_3'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + r(x)$$

が成り立ち，しかも $L(y_1) = L(y_2) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} L(y_3) &= C_1(x)L(y_1) + C_2(x)L(y_2) + r(x) \\ &= C_1(x)0 + C_2(x)0 + r(x) \\ &= r(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，目指す等式が得られた．

問 6.40　与えられた微分方程式は $x = 1$ のときには意味をもたないから $x \neq 1$ として話を進める．この方程式に対する斉次方程式 $L(y) = 0$ は，容易に確かめられるように，2 つの特殊解 $y_1 = x$, $y_2 = e^x$ をもつ．そして，$x \neq 1$ であることに注意して，この場合の Wronskian を計算すると

$$W(x) = W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = (x-1)e^x \neq 0$$

であるから，$L(y) = r(x)$ の特殊解は $r(x) = x - 1$ であることに注意して，例題 6.12 にしたがって計算すると

$$\begin{aligned} y_3 &= -x\int \frac{(x-1)e^x}{(x-1)e^x}\,dx + e^x\int \frac{(x-1)x}{(x-1)e^x}\,dx \\ &= -x\int dx + e^x\int xe^{-x}\,dx = -(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

となる．よって，非斉次方程式 $L(y) = r(x)$ の一般解は，C_1, C_2 を任意定数として，例題 6.12 に従えば

$$y = C_1x + C_2e^x - (x^2 + x + 1) = (C_1 - 1)x + C_2e^x - (x^2 + 1)$$

なる形で得られる．ここで，$C_1 - 1$ を改めて C_1 と書くことにより求める一般解は

$$y = C_1 x + C_2 e^x - (x^2 + 1)$$

で与えられる．

問 6.41　初めに，例題 6.11 の考え方で解くために $y = ax^2 + bx + c$ とおき，これが $L(y) = x^2$ を満たすように定数 a, b, c を決定しよう．

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad y' = 2ax + b, \qquad y'' = 2a$$

であるから，これらを非斉次方程式 $L(y) = x^2$ に代入して整理すると恒等式

$$4ax^2 - 2(5a - 2b)x + (2a - 5b + 4c) \equiv x^2$$

を得る．したがって

$$4a = 1, \qquad 5a - 2b = 0, \qquad 2a - 5b + 4c = 0$$

となるから，この 3 元連立方程式 1 次方程式を解けば

$$a = \frac{1}{4}, \qquad b = \frac{5}{8}, \qquad c = \frac{21}{32}$$

を得る．よって，微分方程式 $L(y) = x^2$ の特殊解として

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{21}{32}$$

が得られた．他方，容易にわかるように斉次方程式 $L(y) = 0$ の一般解は，C_1, C_2 を任意定数として

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$$

で与えられる．したがって，非斉次方程式 $L(y) = x^2$ の一般解は

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{21}{32}$$

となる．

次に，例題 6.12 の考え方で解いてみよう．方程式 $L(y)=0$ の 2 つの解 $y_1=e^x$, $y_2=e^{4x}$ の Wronskian は

$$W(x)=W[y_1,\ y_2]=W[e^x,\ e^{4x}]=\begin{vmatrix} e^x & e^{4x} \\ e^x & 4e^{4x} \end{vmatrix}=3e^{5x}>0$$

であるから

$$r(x)=x^2, \qquad W(x)=3x^5, \qquad y_1=e^x, \qquad y_2=e^{4x}$$

であることに注意して，例題 6.12 にしたがって方程式 $L(y)=x^2$ の特殊解を求めると

$$\begin{aligned} y_3 &= -y_1\int\frac{r(x)y_2(x)}{W(x)}\,dx+y_2\int\frac{r(x)y_1(x)}{W(x)}dx \\ &= -\frac{1}{3}e^x\int x^2e^{-x}\,dx+\frac{1}{3}e^{4x}\int x^2e^{-4x}\,dx \\ &= -\frac{1}{3}e^x(-x^2-2x-2)e^{-x}+\frac{1}{3}e^{4x}\left(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\right)e^{-4x} \\ &= \frac{1}{4}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{21}{32} \end{aligned}$$

が得られる．したがって，方程式 $L(y)=x^2$ の求める一般解は

$$y=C_1e^x+C_2e^{4x}+\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{21}{32}$$

で与えられる．ここで，C_1, C_2 は任意定数である．

問 6.42 容易にわかるように，$y_1=x$ と $y_2=x^2$ とが $L(y)=0$ の 2 つの解であり，これらの Wronskian を計算すると条件より $x\neq 0$ であるから

$$W(x)=W[y_1,y_2]=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=x^2>0$$

となる．さらにまた

$$y_1 = x, \qquad y_2 = x^2, \qquad r(x) = 1, \qquad W(x) = x^2$$

であるから，例題 6.12 にしたがって方程式の特殊解を求めると

$$\begin{aligned} y_3 &= -y_1 \int \frac{r(x)y_2(x)}{W(x)}\,dx + y_2(x) \int \frac{r(x)y_1(x)}{W(x)}\,dx \\ &= -x \int dx + x^2 \int \frac{1}{x}\,dx \\ &= -x^2 + x^2 \log x = (\log x - 1)x^2 \end{aligned}$$

が得られる．したがって，方程式 $L(y) = 1$ の一般解は C_1, C_2 を任意定数として

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + (\log x - 1)x^2 = C_1 x + (C_2 - 1)x^2 + x^2 \log x$$

で与えられる．ここで，$C_2 - 1$ を改めて C_2 と書けば求める一般解は

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \log x$$

となる．