確率過程論　第９回

担当：三角　淳　2019年6月20日

講義概要

・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I、推移行列を $\mathbf{P}=(p_{ij})_{i,j\in I}$ とする。
$n=0,1,2,\cdots$ に対して、$\pi_j(n)=P(X_n=j)\,(j\in I)$, $\pi(n)=(\pi_j(n))_{j\in I}$ とおく。特に $\pi(0)$ を初期分布と呼ぶ。

・任意の $n\in\mathbb{N}$, $i_0,i_1,\cdots,i_n\in I$ に対して、次が成り立つ。

$$P(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)=\pi_{i_0}(0)p_{i_0i_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}.$$

・$n=0,1,2,\cdots$, $i,j\in I$ に対して、n ステップ推移確率を $p_{ij}^{(n)}=P(X_n=j\,|\,X_0=i)$ で定める。$\mathbf{P}^{(n)}=(p_{ij}^{(n)})_{i,j\in I}$ とおくと、次が成り立つ。

$$\mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{P}^n,\quad \pi(n)=\pi(0)\mathbf{P}^n.$$

レポート問題　以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[**1**] 初期分布が $\pi(0)=\begin{pmatrix}\frac14 & \frac14 & \frac12\end{pmatrix}$、推移行列が $\mathbf{P}=\dfrac13\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I=\{1,2,3\}$ とする。このとき次を求めよ。

(1) $P(X_9=1\,|\,X_7=3)$,　(2) $P(X_3=2)$.

補充問題

[**2**] 初期分布が $\pi(0)=\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12\end{pmatrix}$、推移行列が $\mathbf{P}=\dfrac15\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I=\{1,2\}$ とする。

(1) $\mathbf{P}^n=\dfrac13\begin{pmatrix}1+2\left(-\frac15\right)^n & 2-2\left(-\frac15\right)^n\\ 1-\left(-\frac15\right)^n & 2+\left(-\frac15\right)^n\end{pmatrix}$ $(n\in\mathbb{N})$ を示せ。

(2) $P(X_n=1)$, $P(X_n=2)$ $(n\in\mathbb{N})$ を求めよ。

[**3**] 初期分布が $\pi(0)=\begin{pmatrix}\frac13 & \frac23\end{pmatrix}$、推移行列が $\mathbf{P}=\dfrac14\begin{pmatrix}3&1\\0&4\end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I=\{1,2\}$ とする。

(1) $\mathbf{P}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ を求めよ。　(2) $P(X_n=1)$, $P(X_n=2)$ $(n\in\mathbb{N})$ を求めよ。