確率過程論　第２回

担当：三角　淳　2019年4月18日

講義概要

・確率変数列で、添字を時刻とみなしたものを確率過程と呼ぶ。$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ などのように、添字が離散的な場合に離散時間確率過程、また $\{X_t\}_{t\geq 0}$ などのように、添字が連続的な場合に連続時間確率過程と呼ぶ。

・確率過程がとる値の集合を状態空間と呼ぶ。

・$\{X_t\}_{t\geq 0}$ の値が時刻とともに $0, 1, 2, \cdots$ と増加し、標本路が時刻に関する右連続関数のとき計数過程と呼ぶことにする。

・任意の $n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ に対して

$$X_{t_1} - X_{t_0},\, X_{t_2} - X_{t_1},\, \cdots,\, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

が独立であるとする。このとき $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は独立増分をもつという。

・任意の $0 \leq s < t < \infty,\ h > 0$ に対して $X_t - X_s$ と $X_{t+h} - X_{s+h}$ が同分布であるとする。このとき $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は定常増分をもつという。

レポート問題　以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[**1**] 確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が、任意の $t \geq 0$ に対して $E(X_t) = t^3$ をみたすとする。

(1) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が独立増分をもつとき、$E[(X_5 - X_4)(X_2 - X_1)]$ を求めよ。

(2) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が定常増分をもたないことを示せ。

補充問題

[**2**] 確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を $P(X_t = 0, \forall t \geq 0) = \dfrac{1}{2}$, $P(X_t = t^2, \forall t \geq 0) = \dfrac{1}{2}$ であるようなものとする。

(1) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が独立増分をもたないことを示せ。

(2) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が定常増分をもたないことを示せ。

[**3**] 定常独立増分をもつ確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ に対して、確率過程 $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ を $Y_t = 2X_t$ によって定める。

(1) $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ が独立増分をもつことを示せ。

(2) $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ が定常増分をもつことを示せ。