確率過程論　第13回

担当：三角　淳　2019年7月18日

講義概要

・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I とする。$f_{ij}^{(n)}$ は初通過確率を表す。$i \in I$ が再帰的のとき、

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

とおく。$\mu_i < \infty$ のとき i は正再帰的であるといい、$\mu_i = \infty$ のとき i は零再帰的であるという。

・I が有限集合のとき、$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が既約かつ周期 1 ならば、エルゴード的であるという。また I が無限集合のとき、$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が既約かつ周期 1 で、全ての状態が正再帰的ならば、エルゴード的であるという。

レポート問題　以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[**1**] $0 \le a \le 1$ に対して、推移行列が $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1-a \\ 1-a & 0 & a \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。

(1) このマルコフ連鎖が既約となるような a の範囲を求めよ。

(2) このマルコフ連鎖がエルゴード的となるような a の範囲を求めよ。

補充問題

[**2**] 推移行列が $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。このとき各状態は再帰的となる（確認はしなくてよい）が、μ_1, μ_2, μ_3 を計算することにより、全ての状態が正再帰的であることを確かめよ。

[**3**] 推移行列が次で与えられるマルコフ連鎖がエルゴード的かどうか調べよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$