理工系微分積分学　第13回

担当：三角　淳　2020年1月21日

講義概要（教科書p117-119も参照）

・グリーンの定理：$P(x,y), Q(x,y)$ が有界閉領域 D 上で C^1 級のとき、

$$\int_{\partial D}(P(x,y)dx+Q(x,y)dy)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dxdy.$$

ただし、境界 ∂D の向きは、D の内部が進行方向の左手となるものとする。

・特に、$P(x,y)=0,\ Q(x,y)=x$ の場合と、$P(x,y)=-y,\ Q(x,y)=0$ の場合を考えれば、次が成り立つ。

$$（D\text{の面積}）=\int_{\partial D}xdy=\int_{\partial D}(-y)dx.$$

レポート問題　以下の[1]の解答を、1月28日の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[1] 次の線積分をグリーンの定理を用いて重積分の形で表し、さらにその値を求めよ。

$$\int_C\left((4x^2-y)dx+(2x-5y^3)dy\right),\quad C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ \text{向き}\ t:0\to 2\pi.$$

補充問題

[2] (1) $x=3\cos t,\ y=2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ で囲まれる図形を図示せよ。

(2) (1)の図形の面積を、線積分を計算することによって求めよ。

[3] $P(x,y)=3x^2y,\ Q(x,y)=x^3+e^{2y}$ とする。

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ を求めよ。

(2) $C: y=1+\sin x$ （向き：$(0,1)\to(\pi,1)$）に対して、$\displaystyle\int_C(P(x,y)dx+Q(x,y)dy)$ を求めよ。