

統計数学II 第14回

担当：三角 淳 2018年7月24日

講義概要

・ $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I とする。 $p_{ij}^{(n)}$ は n ステップ推移確率を表す。 I が有限集合のとき、 $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ が既約かつ周期1ならば、エルゴード的であるという。 I が無限集合のとき、 $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ が既約かつ周期1で、全ての状態が正再帰的ならば、エルゴード的であるという。

・ \mathbf{P} を推移行列とする。 $\pi = (\pi_j)_{j \in I}$ で、 $\pi_j \geq 0$ ($j \in I$)、 $\sum_{j \in I} \pi_j = 1$ かつ $\pi \mathbf{P} = \pi$ をみたすものを定常分布と呼ぶ。

・ $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ がエルゴード的であるとする。このとき定常分布 π が唯一つ存在して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad (i, j \in I)$$

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] 推移行列が $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/7 & 3/7 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。

- (1) このマルコフ連鎖がエルゴード的である事を示せ。
- (2) このマルコフ連鎖の定常分布を求めよ。

補充問題

[2] 推移行列が次で与えられるマルコフ連鎖がエルゴード的かどうか調べよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

[3] 推移行列が $\mathbf{P} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。

- (1) このマルコフ連鎖がエルゴード的である事を示せ。
- (2) このマルコフ連鎖の定常分布を求めよ。
- (3) 各 $i, j \in I$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j | X_0 = i)$ を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$ を求めよ。