

統計数学II 第10回

担当：三角 淳 2018年6月19日

講義概要

・ $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I とする。 $p_{ij}^{(n)}$ は n ステップ推移確率を表す。

$$p_{ij}^{(n)} > 0$$

であるような 0 以上の整数 n が存在するとき、状態 i は状態 j に到達可能であるといい $i \rightarrow j$ とかく。 $i \rightarrow j$ かつ $j \rightarrow i$ のとき、 i と j は相互到達可能であるといい $i \leftrightarrow j$ とかく。同値関係 \leftrightarrow によって各状態を同値類に分ける事ができる。

・ 任意の $i, j \in I$ が相互到達可能のとき、 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は既約であるという。

・ $i \in I$ に対して

$$\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

の最大公約数を i の周期と呼ぶ。

・ $i \leftrightarrow j$ のとき $d(i) = d(j)$ となる。特に $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が既約のとき、全ての状態の周期は等しく、その共通の値を $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ の周期と呼ぶ。

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] 推移行列が $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。

(1) このマルコフ連鎖が既約である事を示せ。

(2) このマルコフ連鎖の周期を求めよ。

補充問題

[2] 推移行列が次で与えられるマルコフ連鎖に対して、各状態を相互到達可能性から定まる同値類に分けよ。なお (1),(2) では状態空間 $I = \{1, 2, 3\}$ 、(3) では $I = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[3] [2] のそれぞれのマルコフ連鎖に対して、各状態の周期を求めよ。