

理工系微分積分学 第13回

担当：三角 淳 2019年1月22日

講義概要（教科書 p117-119 も参照）

・ グリーンの定理： $P(x, y), Q(x, y)$ が有界閉領域 D 上で C^1 級のとき、

$$\int_{\partial D} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$

ただし、境界 ∂D の向きは、 D の内部が進行方向の左手となるものとする。

・ 特に、 $P(x, y) = 0, Q(x, y) = x$ の場合と、 $P(x, y) = -y, Q(x, y) = 0$ の場合を考えれば、次が成り立つ。

$$(D \text{ の面積}) = \int_{\partial D} x dy = \int_{\partial D} (-y) dx.$$

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[1] 次の線積分をグリーンの定理を用いて重積分の形で表し、さらにその値を求めよ。

$$\int_C ((2x^3 + y)dx + (6x - 3y^2)dy), \quad C : x = \cos t, y = \sin t, \text{ 向き } t : 0 \rightarrow 2\pi.$$

補充問題

[2] (1) $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) で囲まれる図形を図示せよ。

(2) (1) の図形の面積を、線積分を計算することによって求めよ。

[3] $P(x, y) = 3x^2y, Q(x, y) = x^3 + e^{2y}$ とする。

(1) $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ を求めよ。

(2) $C : y = 1 + \sin x$ (向き : $(0, 1) \rightarrow (\pi, 1)$) に対して、 $\int_C (P(x, y)dx + Q(x, y)dy)$ を求めよ。