

統計数学II 第7回

担当：三角 淳 2017年5月30日

講義概要

・パラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程 $\{N_t\}_{t \geq 0}$ と $S_n = \inf\{t \geq 0 \mid N_t = n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) に対して、 S_n は密度関数が次で与えられるようなガンマ分布に従う。

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \quad (x \geq 0)$$

・上記の S_n に対して、

$$E(S_n) = \frac{n}{\lambda}, \quad V(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}$$

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] $\{N_t\}_{t \geq 0}$ をパラメーター 4 のポアソン過程とする。 $S_n = \inf\{t \geq 0 \mid N_t = n\}$ とするとき、 $P(S_2 \leq 3)$ を次の 2 通りの方法で求めよ。

- (1) $S_2 \leq 3$ と $N_3 \geq 2$ が同値である事を用いる。
- (2) S_2 の密度関数の具体形を用いる。

補充問題

[2] $\{N_t\}_{t \geq 0}$ をパラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程とし、 $S_n = \inf\{t \geq 0 \mid N_t = n\}$ とする。このとき任意の $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ に対して S_n と S_m が独立でない事を示せ。

[3] $\{N_t\}_{t \geq 0}$ をパラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程とする。 $S_n = \inf\{t \geq 0 \mid N_t = n\}$ とするとき次を示せ。

$$E(e^{tS_n}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \quad (t < \lambda, n \in \mathbb{N})$$