

統計数学II 第14回

担当：三角 淳 2013年1月22日

講義概要

- ・ 離散時間マルコフ連鎖の極限推移確率に関する補足。
- ・ 連続時間マルコフ連鎖の定義： $\{X_t\}_{t \geq 0}$ を連続時間確率過程で、状態空間 I は高々可算集合とする。任意の $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < s$, $t > 0$, $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in I$ に対して

$$P(X_{s+t} = j \mid X_{s_0} = i_0, X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_{n-1}} = i_{n-1}, X_s = i) = P(X_{s+t} = j \mid X_s = i)$$

をみたすとする。このとき $\{X_t\}_{t \geq 0}$ を連続時間マルコフ連鎖と呼ぶ。また上のような性質をマルコフ性と呼ぶ。

- ・ 上式の右辺を $p_{ij}(t)$ とおき、推移確率と呼ぶ。
- ・ ポアソン過程は連続時間マルコフ連鎖の特別な場合である。

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] $0 \leq a \leq 1$ に対して、推移行列が $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ で与えられる離散時間マルコフ連鎖を考える。

- (1) このマルコフ連鎖がエルゴード的であるための a の条件を求めよ。
- (2) 各 a に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ は存在するか。存在するときはそれを具体的に求めよ。(必ずしも P^n を計算する必要はない。) 存在しないときはその事を示せ。

補充問題

[2] 推移行列が $P = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる離散時間マルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。

- (1) このマルコフ連鎖がエルゴード的である事を示せ。
- (2) このマルコフ連鎖の定常分布を求めよ。
- (3) 各 $i, j \in I$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j \mid X_0 = i)$ を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ を求めよ。

[3] 推移行列が $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる離散時間マルコフ連鎖を考える。

- (1) このマルコフ連鎖がエルゴード的でない事を示せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ が存在しない事を示せ。