確率過程特論　レポート問題の略解（2011年6月28日出題分）

担当：三角　淳

[1]

$$\begin{cases} -f(c)+2(1-f(c))+2(f(d)-f(c))=0, \\ -f(d)+(1-f(d))+2(f(c)-f(d))=0 \end{cases}$$

を解いて、$f(c)=\frac{5}{8}$, $f(d)=\frac{9}{16}$ を得ます。

[2] 関数 $f:G\to\mathbb{R}$ を $f(a)=0$, $f(b)=1$ をみたすようなものとするとき、

$$\mathcal{E}(f,f)=5f(c)^2+4f(d)^2-4f(c)f(d)-4f(c)-2f(d)+4$$

は、$f(c)=\frac{5}{8}$, $f(d)=\frac{9}{16}$ のときに最小値 $\frac{35}{16}$ をとります。これより $R_{\mathrm{eff}}(a,b)=\frac{16}{35}$ です。

[3] (1) $\dfrac{5}{8}$.　　(2) $\dfrac{1}{3}\times 1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{16}=\dfrac{35}{48}$.

[4] 3次元正方格子、4次元正方格子の各辺に重み1を与えたときの有効抵抗をそれぞれ R_{eff}, R'_{eff} で表す事にします。このときカット則より $R_{\mathrm{eff}}(0,\infty)\geq R'_{\mathrm{eff}}(0,\infty)$ となる事に注意します。ここで (授業で示したように) 3次元正方格子上のシンプルランダムウォークは非再帰的である事から、$R_{\mathrm{eff}}(0,\infty)<\infty$ です。従って $R'_{\mathrm{eff}}(0,\infty)<\infty$ となり、4次元正方格子上のシンプルランダムウォークが非再帰的である事が分かります。

[5] $R_{\mathrm{eff}}(0,\infty)=\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2^x}<\infty$ よりランダムウォークは非再帰的となります。

[6] (1) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ と比較する事により、与えられた級数は $\alpha>1$ のとき収束し、$\alpha\leq 1$ のとき発散します。

(2) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}dx=\int_{\log 2}^{\infty}\frac{1}{y^{\alpha}}dy$ ($y=\log x$ と変数変換した) と比較する事により、与えられた級数は $\alpha>1$ のとき収束し、$\alpha\leq 1$ のとき発散します。

[7] については文献を参照して下さい。