統計数学II　期末試験

担当：三角　淳　2012年2月7日実施

・解答は、結果だけでなく途中過程も書いて下さい。

[1] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター 4 のポアソン過程とする。$S_n = \inf\{t \geq 0 \,|\, N_t = n\}$ をポアソン過程の値がはじめて n となった時刻とするとき、$P(S_2 > 2)$ を次の 2 通りの方法で求めよ。

(1) $S_2 > 2$ と $N_2 < 2$ が同値である事を用いる。

(2) S_2 の密度関数が $p(x) = 16xe^{-4x}$ $(x \geq 0)$ である事を用いる。

[2] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター 2 のポアソン過程とする。このとき正の実数 s に対して $E[N_{2012} \,|\, N_s = 1]$ を求めよ。

[3] 初期分布が $\pi(0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$、推移行列が $\mathbf{P} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ で与えられるようなマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I = \{1, 2\}$ とする。

(1) $\mathbf{P}^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 + 3(-\frac{1}{4})^n & 3 - 3(-\frac{1}{4})^n \\ 2 - 2(-\frac{1}{4})^n & 3 + 2(-\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$ $(n \in \mathbb{N})$ を示せ。

(2) $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ $(n \in \mathbb{N})$ を求めよ。

[4] 推移行列が次で与えられるマルコフ連鎖に対して、各状態を相互到達可能性から定まる同値類に分けよ。なお状態空間 $I = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

・[1] (1) 15 点 (2) 15 点、[2] 20 点、[3] (1) 15 点 (2) 15 点、[4] 20 点の 100 点満点です。今回の期末試験と、普段のレポートの提出状況をもとに成績評価を行います。採点結果に関しては、2 月 9 日 (木) の正午までに理学部 2 号館 6 階の学部生用掲示板にアナウンスを出す予定です。