統計数学II　第12回

担当：三角　淳　2012年1月17日

講義概要

・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I とする。$p_{ij}^{(n)}$ は n ステップ推移確率を表す。$n \in \mathbb{N}$, $i, j \in I$ に対して初通過確率を次で定める。

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_1 \neq j, \cdots, X_{n-1} \neq j, X_n = j \,|\, X_0 = i).$$

更に $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ とおく。
・$f_{ii} = 1$ のとき、$i \in I$ は再帰的であるという。また $f_{ii} < 1$ のとき、$i \in I$ は一時的 (過渡的、非再帰的) であるという。
・$i \in I$ が再帰的である事は $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ と同値である。また $i \in I$ が一時的である事は $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ と同値である。
・同じ同値類に属する状態は全て再帰的、または全て一時的となる。

レポート問題 (以下の [1] の解答を、次回の授業の終わりに提出して下さい。)

[1] 推移行列が $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。このとき各状態が再帰的かどうか調べよ。

補充問題

[2] 推移行列が $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。

(1) このマルコフ連鎖が既約である事を示せ。
(2) 全ての状態が再帰的である事を示せ。

[3] $0 \leq a \leq 1$ に対して、推移行列が $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1-a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。このとき各状態が再帰的かどうか調べよ。