大域解析学特論　レポート問題

担当：三角　淳　2010年6月29日出題

以下の [1]〜[8] の中から2題以上を選択し、レポートとして提出して下さい。レポートは**7月20日**の授業終了時に回収します。やむをえずこの日に提出できない場合は、個別に申し出て下さい。

[1] グラフ $\Gamma = (G, E)$ を、頂点集合が $G = \{a, b, c, d, e\}$、辺集合が

$$E = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, e\rangle\}$$

で与えられるようなものとする。ここで a, b, c, d, e は相異なる点とし、各辺は向き付けられていないものとする。更に、E の各元に対して次のように重みを定める。

$$\mu_{ac} = 1, \mu_{ad} = 2, \mu_{bc} = 2, \mu_{be} = 1, \mu_{cd} = 1, \mu_{de} = 1.$$

(1) Γ を図示せよ。
(2) 対応する重み付きグラフ上のランダムウォークの推移確率を求めよ。

[2] [1] において、関数 $f : G \to \mathbb{R}$ で次をみたすようなものを求めよ。

$$\begin{cases} \Delta f(x) = 0, \quad x \in G \setminus \{a, b\}, \\ f(a) = 0, \quad f(b) = 1. \end{cases}$$

[3] [1] において、有効抵抗 $R_{\mathrm{eff}}(a, b)$ を求めよ。

[4] [1] において、
(1) 頂点 c から出発したランダムウォークが、頂点 a に到達するより前に頂点 b に到達する確率を求めよ。
(2) 頂点 a から出発したランダムウォークが、頂点 a に再び戻ってくるより前に頂点 b に到達する確率を求めよ。

[5] 2次元正方格子の各辺に、「任意の辺 $\langle x, y\rangle$ に対して $\frac{1}{10} \le \mu_{xy} \le 10$」をみたすような重みを与えておく。このとき、対応する重み付きグラフ上のランダムウォークは再帰的である事を示せ。

[6] Γ_1, Γ_2 を、それぞれ連結かつ局所的に有限な無限グラフで、$\Gamma_1 \supset \Gamma_2$ をみたすようなものとする。

(1) Γ_1 上のシンプルランダムウォークが再帰的ならば、Γ_2 上のシンプルランダムウォークも再帰的である事を示せ。

(2) Γ_2 上のシンプルランダムウォークが非再帰的ならば、Γ_1 上のシンプルランダムウォークも非再帰的である事を示せ。

[7] スターリングの公式 $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = 1$ を示せ。

[8] 授業内容に関連して、調べたり考察した事について自由に述べよ。