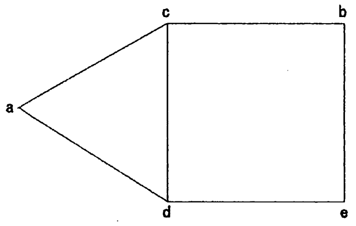
大域解析学特論　レポート問題の略解（2010年6月29日出題分）

担当：三角　淳

1題25点満点として、内容の良い2題に対する点数の和をレポート点とします。これに出席点 (50点 − 欠席回数 $\times$ 5点) を加えたものが、総合での成績評価になります。返却答案には、7月27日が出席と仮定したときの総合評価が丸囲みで書いてあります。

[1] (1)



(2)

	a	b	c	d	e
a	0	0	1/3	2/3	0
b	0	0	2/3	0	1/3
c	1/4	1/2	0	1/4	0
d	1/2	0	1/4	0	1/4
e	0	1/2	0	1/2	0

上の表では、例えば頂点 a から頂点 c に移る確率が 1/3 である事などを表します。

[2]

$$\begin{cases} -f(c) + 2(1 - f(c)) + (f(d) - f(c)) = 0, \\ -2f(d) + (f(c) - f(d)) + (f(e) - f(d)) = 0, \\ (1 - f(e)) + (f(d) - f(e)) = 0 \end{cases}$$

を解いて、$f(c) = \frac{15}{26}$, $f(d) = \frac{4}{13}$, $f(e) = \frac{17}{26}$ を得ます。

[3] 関数 $f : G \to \mathbb{R}$ を $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ をみたすようなものとするとき、

$$\mathcal{E}(f,f) = 4f(c)^2 + 4f(d)^2 + 2f(e)^2 - 2f(c)f(d) - 2f(d)f(e) - 4f(c) - 2f(e) + 3$$

は、$f(c) = \frac{15}{26}$, $f(d) = \frac{4}{13}$, $f(e) = \frac{17}{26}$ のときに最小値 $\frac{31}{26}$ をとります。これより $R_{\mathrm{eff}}(a,b) = \frac{26}{31}$ です。

[4] (1) $\dfrac{15}{26}$.　(2) $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{15}{26} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{13} = \dfrac{31}{78}$.

[5] 「全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[-n,n]^2$ の周上の辺をショートさせた」グラフを考える事により、

$$R_{\mathrm{eff}}(0,\infty) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10(8n-4)} = \infty$$

である事からランダムウォークの再帰性が示されます。

[6] Γ_1, Γ_2 の各辺に重み 1 を与えたときの有効抵抗をそれぞれ $R_{\mathrm{eff}}, R'_{\mathrm{eff}}$ で表す事にします。

(1) Γ_1 上のシンプルランダムウォークが再帰的であるとすると、$R_{\mathrm{eff}}(0,\infty) = \infty$ となります。いま、$\Gamma_1 \supset \Gamma_2$ だからカット則より $R_{\mathrm{eff}}(0,\infty) \leq R'_{\mathrm{eff}}(0,\infty)$ となるので、$R'_{\mathrm{eff}}(0,\infty) = \infty$ となり、Γ_2 上のシンプルランダムウォークが再帰的である事が分かります。

(2) についても同様に証明できます。

[7] については文献を参照して下さい。