測度論　期末試験

担当：三角　淳　2010年8月3日実施

・計算問題では、結果だけでなく途中過程も書いて下さい。

[1] 正の整数 n に対して、$\mathbb{R}$ 上の区間 A_n を $A_n = \left[n, n + \dfrac{3}{n(n+1)}\right]$ で定める。このとき、$\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ の測度を求めよ。

[2] (1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が可測関数である事の定義を述べよ。
　(2) $f(x) = -x + 2$ が可測関数である事を、(1) の定義に基づいて直接示せ。

[3] 正の整数 n と $0 \leq x \leq 1$ に対して、

$$f_n(x) = \frac{-nx^{2010} + 8n^2}{2n^2x + \sqrt{x} + 2n^2}$$

と定める。
　(1) 任意の n と x に対して、$f_n(x) \geq 0$ である事を示せ。
　(2) 任意の n と x に対して、$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ である事を示せ。
　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ を求めよ。(極限と積分の順序交換を行う場合は、その根拠を明記する事。)

[4] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を可測関数とする。E を $\mathbb{R}$ 上の可測集合で測度が 0 であるようなものとするとき、次が成り立つ事を示せ。

$$\int_E f(x)dx = 0.$$