4 次元偏極多様体における多重随伴束の大域切断のなす次元について

高知大学理学部　福間　慶明 (Fukuma Yoshiaki)

1　はじめに

X を複素数体上定義された n 次元非特異射影多様体, L を X 上の豊富な因子とする. このとき対 (X, L) を**偏極多様体**と呼ぶ. 随伴束 $K_X + L$ の飯高次元 $\kappa(K_X + L)$ が 0 以上の場合, 定義により, ある正整数 m で $h^0(m(K_X + L)) > 0$ となるものが存在する. このような m について考察を行うことが, 現在私が行っている研究の一つである. 特に $n = 4$ の場合について結果を得ることができたのでそれについて報告する.

今回, 津山シンポジウムで講演の機会を与えて下さった, 学習院大学の飯高茂先生と津山高専の松田修先生に心から感謝したいと思います.

2　随伴束の大域切断の次元に関する問題について

(X, L) を n 次元偏極多様体とする. ここで随伴束の大域切断の次元に関することについて, 歴史を含めて, 知られていることをまとめてみよう.
まず, 一般に偏極多様体の随伴束の大域切断のなす次元についての問題, もしくは予想で一番最初に考えられたものは (私の知る限り)1990 年に Ionescu により提出された以下のものであろう.

Conjecture 2.1 (Ionescu [19]) (X, L) を n 次元偏極多様体とする. もし $K_X + L$ が nef なら $h^0(K_X + L) > 0$ が成立する.

(この問題は後述の Ambro-川又予想の特別な場合であることに注意しておく.) これについては 2 次元以下の場合では Riemann-Roch の定理や消滅定理などを用いると比較的簡単に示すことができる. しかし 3 次元以上の場合はとても難しい問題となる. この 5 年後にこの予想の特別な場合として Beltrametti と Sommese により次の予想が提出された.

Conjecture 2.2 (Beltrametti-Sommese [2]) (X, L) を n 次元偏極多様体とする. もし $K_X + (n-1)L$ が nef なら $h^0(K_X + (n-1)L) > 0$ が成立する.

この予想は Ionescu 予想のかなり特別な場合であることはわかると思う．この予想が提出された当初は, 以下の場合には正しいことが知られていた.

(1) 2 次元以下の場合.

(2) L が基点自由の場合.

しかしこの Beltrametti-Sommese 予想についても 3 次元以上の場合はかなり難しい問題であり, 2004 年ころまでは上記以外に筆者により次の場合に正しいことが示されていただけであった ([7]).

(3) $\dim X = 3$ かつ $h^0(L) \geq 2$ の場合.

(4) $\dim \mathrm{Bs}|L| = 0$ の場合.

ところが, 2004 年ころ, 筆者がこれとは関係なく偏極多様体の不変量として**第 $\boldsymbol{i}$ 断面幾何種数 $\boldsymbol{g_i(X,L)}$** なるものを定義し, その性質を調べていた．(ここで第 i 断面幾何種数という物が出てきたが, 簡単に言うと, L が非常に豊富な因子のときは, L の完備線形系 $|L|$ の一般元を用いてうまく X を i 次元まできったときにできる i 次元非特異射影多様体を Y とすると $g_i(X,L) = h^i(\mathcal{O}_Y)$ となる．もちろん断面幾何種数は一般の豊富な因子について定義される．特に $i=0$ のとき, $g_0(X,L)$ は L の次数となり, $i=1$ のとき, $g_1(X,L)$ は (X,L) の断面種数となる.)
そのころ $n=3$ かつ $i=2$ のときの $g_2(X,L)$ の性質についていくつかの性質がわかっていて, それらを用いることにより $n=3$ のときに Conjecture 2.2 を示すことができた ([10])．さらに $h^0(K_X+2L)=1$ となる 3 次元偏極多様体についても分類ができるという, 自分にとって驚きの結果がえられた.
これを発端として Conjecture 2.2 に関する論文がいくつか出た．(例えば [3], [4], [17] など) 特に 2009 年末に Höring は次の結果を示した.

Theorem 2.1 (Höring [17]) X を高々有理特異点のみ持つ $n(\geq 2)$ 次元正規射影多様体, A を X 上の nef かつ big な Cartier 因子で $K_X+(n-1)A$ を generically nef とする．このとき $1 \leq j \leq n-1$ なるある整数 j が存在して $h^0(K_X+jA)>0$ をみたす.

これにより $h^0(L)>0$ なら一般次元で Conjecture 2.2 は正しいことが示されたことになる．しかし, 現在でも $n \geq 4$ では一般に Conjecture 2.2 が正しいことはわかっていない.

ところで Ionescu 予想であるが, 今では次のような形に一般化されている.

Conjecture 2.3 (Ambro-川又) X を完備正規多様体, D を X 上の Cartier 因子, B を X 上の有効 $\mathbb{R}$-因子で (X,B) が川又ログ端末的とする．もし D がネフで $D-(K_X+B)$ がネフかつ巨大なら $h^0(D)>0$ である.

この一般の予想は $n \leq 2$ では川又氏により正しいことが示されている．しかし, $n \geq 3$ ではとても難しい．Conjecture 2.3 の非特異版が Conjecture 2.1 であるが, この場合でもかなり難しい．しかし, Höring が 2009 年に次の結果 [17] を示した．

Theorem 2.2 (Höring [17]) X を高々$\mathbb{Q}$-factorial canonical singularities をもつ 3 次元正規多様体, A を X 上の nef かつ big な Cartier 因子で $K_X + A$ が nef とする．このとき $h^0(K_X + A) > 0$ が成り立つ．

とくに Conjecture 2.1 の $n = 3$ の場合が示されたことになる．
ところで (X, L) が非特異偏極多様体とする．$K_X + L$ が nef であると non-vanishing theorem より $\kappa(K_X+L) \geq 0$ となる．そこで一般に $\kappa(K_X+L) \geq 0$ のとき $h^0(m(K_X+L)) > 0$ となる m はどのような数になるかを考えるのは興味深い問題である．これについて筆者は次の問題 [11, Problem 3.2] を考えた．

Problem 2.1

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n \quad := \quad \{\, r \in \mathbb{N} \mid & \dim X = n \text{ かつ } \kappa(K_X + L) \geq 0 \text{ をみたす} \\ & \text{任意の非特異偏極多様体 } (X, L) \text{ に対して} \\ & h^0(r(K_X + L)) > 0 \text{ となる} \bigr\},\end{aligned}$$

$$m(n) := \begin{cases} \min \mathcal{M}_n & \mathcal{M}_n \neq \emptyset \text{ のとき}, \\ \infty & \mathcal{M}_n = \emptyset \text{ のとき}. \end{cases}$$

このとき $m(n)$ を求めよ．

$n \leq 2$ では $m(1) = 1$, $m(2) = 1$ となることが Riemann-Roch の定理や消滅定理等を用いると比較的簡単にわかる．しかし $n = 3$ になると, とたんに難しくなる．そこでこれについて考え, 2007 年には $m(3) \leq 2$ となることを示すことができた ([13])．特に $\kappa(K_X + L) = 3$ なら $h^0(2(K_X + L)) \geq 3$ がいえ, さらに $h^0(2(K_X + L)) = 3, 4$ となる (X, L) の分類も与えることができた ([14])．この分類を見ると, $h^0(2(K_X + L)) = 3$ となる (X, L) は $\kappa(X) = -\infty$ でなく, $\kappa(X) = 0$ となることがわかる (これは私にとってはちょっと意外であった)．
以上のことから「$m(3) = 1$ となるか, $m(3) = 2$ となるか」が問題となったわけである．これについては, しばらく未解決であったが, 実は, 2009 年末に発表された上の Höring の定理 (Theorem 2.2) と Beltrametti-Sommese, 藤田による随伴束の理論より $m(3) = 1$ となることが示される．
以上から $m(3) = 1$ がいえて, $n = 3$ の場合が解決された．$n = 3$ の場合が解決されて落胆していたが, 気持ちを切り替えて, $n = 4$ の場合 $m(4)$ を調べ, 先手を打とうと考えた．その結果が今回の内容である．

ここで, より一般に問題設定をおこなう．

Definition 2.1 $(\sharp)$ を偏極多様体 (X,L) に関する仮定とする．任意の固定された正整数 n に対して,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_n(\sharp) &:= \{\ (X,L):\ 偏極多様体 \mid \dim X=n,\ (X,L)\ は\ (\sharp)\ と \\
&\qquad\qquad\qquad \kappa(K_X+L)\geq 0\ をみたす\ \}, \\
\mathcal{P}_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp) &:= \{\ (X,L):\ 偏極多様体 \mid \dim X=n,\ (X,L)\ は\ (\sharp)\ をみたし \\
&\qquad\qquad\qquad さらに\ K_X+L\ は\ \mathrm{nef}\ である\ \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_n(\sharp) &:= \left\{\ r\in\mathbb{N} \mid \forall (X,L)\in\mathcal{P}_n(\sharp)\ に対し\ h^0(r(K_X+L))>0\right\}, \\
\mathcal{M}_n(\sharp)^+ &:= \left\{\ r\in\mathbb{N} \mid \forall m\geq r\ と\ \forall (X,L)\in\mathcal{P}_n(\sharp)\ に対し\ h^0(m(K_X+L))>0\right\}, \\
\mathcal{M}_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp) &:= \left\{\ r\in\mathbb{N} \mid \forall (X,L)\in\mathcal{P}_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp)\ に対し\ h^0(r(K_X+L))>0\right\}, \\
\mathcal{M}_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp)^+ &:= \left\{\ r\in\mathbb{N} \mid \forall m\geq r\ と\ \forall (X,L)\in\mathcal{P}_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp)\ に対し\ h^0(m(K_X+L))>0\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_n(\sharp) &:= \begin{cases} \min\ \mathcal{M}_n(\sharp) & \mathcal{M}_n(\sharp)\neq\emptyset\ のとき, \\ \infty & \mathcal{M}_n(\sharp)=\emptyset\ のとき. \end{cases} \\
m_n(\sharp)^+ &:= \begin{cases} \min\ \mathcal{M}_n(\sharp)^+ & \mathcal{M}_n(\sharp)^+\neq\emptyset\ のとき, \\ \infty & \mathcal{M}_n(\sharp)^+=\emptyset\ のとき. \end{cases} \\
m_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp) &:= \begin{cases} \min\ \mathcal{M}_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp) & \mathcal{M}_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp)\neq\emptyset\ のとき, \\ \infty & \mathcal{M}_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp)=\emptyset\ のとき. \end{cases} \\
m_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp)^+ &:= \begin{cases} \min\ \mathcal{M}_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp)^+ & \mathcal{M}_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp)^+\neq\emptyset\ のとき, \\ \infty & \mathcal{M}_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp)^+=\emptyset\ のとき. \end{cases}
\end{aligned}$$

Remark 2.1 ここで次の不等式が成り立つことに注意する．

$$\begin{aligned}
m_n(\sharp) &\leq m_n(\sharp)^+, \\
m_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp) &\leq m_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp)^+, \\
m_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp) &\leq m_n(\sharp), \\
m_n^{\mathrm{NEF}}(\sharp)^+ &\leq m_n(\sharp)^+.
\end{aligned}$$

まず, 簡単な条件として次の場合を考える．

(SM) $\qquad X$ が非特異射影多様体

このとき次の問題を考える．

Problem 2.2 $m_n(\mathrm{SM})$, $m_n(\mathrm{SM})^+$, $m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM})$, $m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM})^+$ を求めよ．

一般に $m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM})^+$ については以下のことが示される.

Proposition 2.1 $\mathcal{M}_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM}) \neq \emptyset$ が成立する.

Proof. $(X, L) \in \mathcal{P}_N^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM})$ とする. 任意の正整数 m に対して $(m-1)K_X + mL$ は nef かつ big なので, 川又-Viehweg の消滅定理から任意の正整数 i に対して $h^i(m(K_X + L)) = 0$ が成り立つ. したがって任意の正整数 t に対して $h^0(t(K_X+L)) = \chi(t(K_X+L))$ がいえる. また $\chi(t(K_X + L))$ は次数が高々n の多項式なので, ある整数 p で $1 \leq p \leq n + 1$ かつ $h^0(p(K_X + L)) > 0$ をみたすものが存在する. ここで次の Lemma を用いる.

Lemma 2.1 X を n 次元完備正規多様体, D_1 と D_2 を X 上の Cartier 正因子とする. このとき $h^0(D_1 + D_2) \geq h^0(D_1) + h^0(D_2) - 1$ が成り立つ.

Proof. [8, Lemma 1.12] もしくは [18, 15.6.2 Lemma] をみよ. □

これを使うと, 任意の $(X, L) \in \mathcal{P}_N^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM})$ に対して $h^0((n + 1)!(K_X + L)) > 0$ がいえる. したがって $(n + 1)! \in \mathcal{M}_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM})$ となり, 主張を得る. □

この命題より, $m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM}) < \infty$ となることがわかる. さらに, 同様の手法で $m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM})^+ < \infty$ を示すこともできる. この値の上限に関する結果として, 最近, 荒川智匡氏により次のことが示された ([1]).

Theorem 2.3 (荒川)
$K_X + L$ が nef となる任意の n 次元非特異偏極多様体 (X, L) に対して次が成立する. $m \geq \frac{n(n+1)}{2} + 2$ を満たす任意の正整数 m に対して $h^0(m(K_X + L)) > 0$ が成立する. 特に

$$m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM}) \leq m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM})^+ \leq \frac{n(n+1)}{2} + 2$$

がいえる.

Remark 2.2 $n \leq 3$ の場合には次が成り立つことがわかっている.
$m_n(\mathrm{SM}) = 1$, $m_n(\mathrm{SM})^+ = 1$, $m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM}) = 1$, $m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM})^+ = 1$.

そこで次のステップとして $n = 4$ の場合を考えたい. その手始めとして次のことについて考える.

Problem 2.3 $m_4(\mathrm{SM})$ を求めよ.

この問題を考える上で次の条件 (SRE) の場合について考えることが大切である.

(SRE) X が Gorenstein 正規射影多様体で, 高々孤立末端特異点のみ持つ

Problem 2.3 を考える上で必要になるのがこの条件であり, 実はつぎの不等式が言える.

$$2m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SRE})^+ \geq m_n(\mathrm{SM})$$

(詳しくは, 「第 4 節 主結果について」を参照のこと.) また

$$m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SRE})^+ \geq m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM})^+$$

であることを考えると, $m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SRE})^+$ の上限を求めると $m_n^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SM})^+$ の上限もわかる.

3 多重偏極多様体の断面幾何種数について

この章では主結果において用いられる, 多重偏極多様体の断面幾何種数の定義と基本的性質について述べる.

Definition 3.1 X を n 次元射影多様体, i を $0 \leq i \leq n-1$ なる整数とし, $L_1, \ldots, L_{n-i}$ を X 上の豊富な Cartier 因子とする. このとき, $(X, L_1, \ldots, L_{n-i})$ を**タイプが $n-i$ の n 次元多重偏極多様体**とよぶ.

Notation 3.1 X を n 次元射影多様体, i を $0 \leq i \leq n-1$ なる任意の整数, $L_1, \ldots, L_{n-i}$ を X 上の Cartier 因子とする. このとき $\chi(L_1^{t_1} \otimes \cdots \otimes L_{n-i}^{t_{n-i}})$ は $t_1, \ldots, t_{n-i}$ に関する多項式で次数は高々n である. このとき $\chi(L_1^{t_1} \otimes \cdots \otimes L_{n-i}^{t_{n-i}})$ は次のような式に一意的に書ける.

$$\begin{aligned}&\chi(L_1^{t_1} \otimes \cdots \otimes L_{n-i}^{t_{n-i}}) \\ &= \sum_{p=0}^{n} \sum_{\substack{p_1 \geq 0, \ldots, p_{n-i} \geq 0 \\ p_1 + \cdots + p_{n-i} = p}} \chi_{p_1, \ldots, p_{n-i}}(L_1, \ldots, L_{n-i}) \binom{t_1 + p_1 - 1}{p_1} \cdots \binom{t_{n-i} + p_{n-i} - 1}{p_{n-i}}.\end{aligned}$$

Definition 3.2 i を $0 \leq i \leq n-1$ なる整数とし, $(X, L_1, \ldots, L_{n-i})$ をタイプが $n-i$ の n 次元多重偏極多様体とする. このとき, 次を定義する.

(1)

$$\chi_i^H(X, L_1, \ldots, L_{n-i}) := \begin{cases} \chi_{\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i}}(L_1, \ldots, L_{n-i}) & \text{if } 0 \leq i \leq n-1, \\ \chi(\mathcal{O}_X) & \text{if } i = n. \end{cases}$$

(2) **第 i 断面幾何種数 $g_i(X, L_1, \dots, L_{n-i})$** は次の式で定義される:

$$\begin{aligned} g_i(X, L_1, \dots, L_{n-i}) &= (-1)^i(\chi_i^H(X, L_1, \dots, L_{n-i}) - \chi(\mathcal{O}_X)) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-i}(-1)^{n-i-j} h^{n-j}(\mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

Remark 3.1 (0) Definition 3.2 (1) で定義された $\chi_i^H(X, L_1, \dots, L_{n-i})$ は $(X, L_1, \dots, L_{n-i})$ の第 i 断面 H-算術種数とよばれる.

(1) $0 \leq p_1 + \cdots + p_{n-i} \leq n$ なる任意の非負整数 $p_1, \dots, p_{n-i}$ に対して $\chi_{p_1,\cdots,p_{n-i}}(L_1, \dots, L_{n-i})$ は整数となる. したがって特に $g_i(X, L_1, \dots, L_{n-i})$ は整数である.

(2) もし $i = 0$ なら, $g_0(X, L_1, \dots, L_n) = L_1 \cdots L_n$ がいえる.

(3) もし $i = 1$ なら,

$$g_1(X, L_1, \dots, L_n) = 1 + \frac{1}{2}(K_X + L_1 + \cdots + L_{n-1})L_1 \cdots L_{n-1}$$

がいえる.

(4) もし $i = n$ なら, $g_n(X) = h^n(\mathcal{O}_X)$ が成立する.

(5) [12, Definition 2.1] において, 多重偏極多様体のより一般的な断面幾何種数について定義を与えている. 詳しくは [12] をみよ.

ここで断面幾何種数の幾何学的意味づけをみていく. そのために必要な記号をまず定義する.

Notation 3.2 X を n 次元非特異射影多様体, i を $1 \leq i \leq n-1$ なる任意の整数とする. $L_1, \dots, L_{n-i}$ を X 上の豊富な Cartier 因子とする. ここで $1 \leq j \leq n-i$ なる任意の整数 j に対して $\mathrm{Bs}|L_j| = \emptyset$ が成り立つとする. このとき Bertini の定理により, $1 \leq j \leq n-i$ なる任意の整数 j に対して, $|L_j|_{X_{j-1}}|$ のある一般の元 $X_j \in |L_j|_{X_{j-1}}|$ で X_j は $n-j$ 次元非特異射影多様体となるものが存在する (ここで $X_0 := X$ とおいた).

Theorem 3.1 n と i を $n \geq 2$ かつ $1 \leq i \leq n-1$ をみたす整数とする. $(X, L_1, \dots, L_{n-i})$ をタイプ $n-i$ の n 次元多重偏極多様体とする.
$1 \leq j \leq n-i$ なる任意の整数 j に対して $\mathrm{Bs}|L_j| = \emptyset$ とする. このとき

$$g_i(X, L_1, \dots, L_{n-i}) = h^i(\mathcal{O}_{X_{n-i}})$$

が成り立つ.

Proof. [12, Theorem 2.3] をみよ. □

多重偏極多様体の断面幾何種数の更なる性質については [12] をみよ.

次節の主結果を証明する際, 多重偏極多様体の断面幾何種数の性質を用いるが, 特に次の二つの結果は重要である.

Proposition 3.1 X を n 次元射影多様体, i を $0 \leq i \leq n-1$ をみたすある整数とする. $A, B, L_1, \cdots, L_{n-i-1}$ を X 上の直線束とする. このとき

$$
\begin{aligned}
& g_i(X, A+B, L_1, \cdots, L_{n-i-1}) \\
& = g_i(X, A, L_1, \cdots, L_{n-i-1}) + g_i(X, B, L_1, \cdots, L_{n-i-1}) \\
& \quad + g_{i-1}(X, A, B, L_1, \cdots, L_{n-i-1}) - h^{i-1}(\mathcal{O}_X)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

Proof. [12, Corollary 2.4 and Remark 2.6] をみよ. □

Theorem 3.2 X を n 次元正規 Gorenstein 射影多様体で, X は高々末端特異点を持つものとし, $L_1, \cdots, L_m$ を X 上の nef かつ big な直線束, H を X 上の nef 直線束とする. ただし $n \geq 2$ かつ $m \geq 1$ とする. このとき

$$
\begin{aligned}
& h^0(K_X + L_1 + \cdots + L_m + H) - h^0(K_X + L_1 + \cdots + L_m) \\
& = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{(k_1, \cdots, k_{n-s-1}) \in A^m_{n-s-1}} g_s(X, L_{k_1}, \cdots, L_{k_{n-s-1}}, H) \\
& \quad - \sum_{s=0}^{n-2} \binom{m-1}{n-s-2} h^s(\mathcal{O}_X)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ここで $A^p_t := \{(k_1, \cdots, k_t) \mid k_l \in \{1, \cdots, p\}, k_i < k_j \text{ if } i < j\}$ とし,

$$
\sum_{(k_1, \cdots, k_{n-s-1}) \in A^m_{n-s-1}} g_s(X, L_{k_1}, \cdots, L_{k_{n-s-1}}, H) = \begin{cases} 0 & \text{if } n-s-1 > m, \\ g_{n-1}(X, H) & \text{if } s = n-1. \end{cases}
$$

とおく.

Remark 3.2 [13, Theorem 5.1] では X が非特異という条件の下で上記等式を示したが, [13] の議論と同様にして, 「X が n 次元正規 Gorenstein 射影多様体で, 高々末端特異点を持つ場合」にも証明することができる. なぜなら, 証明に必要な「Serre の双対律」と「川又-Viehweg の消滅定理」がこの場合にも成り立つからである. くわしくは [13, Theorem 5.1] をみよ.

4　主結果について

さて, ここから 4 次元偏極多様体の場合を調べよう．本稿の主結果は以下のものである．

Theorem 4.1 (X, L) を 4 次元偏極多様体で, $\kappa(K_X + L) \geq 0$ をみたすものとする．

(a) もし $0 \leq \kappa(K_X + L) \leq 2$ なら, 任意の正整数 m に対して $h^0(2m(K_X + L)) > 0$ が成り立つ．特に $h^0(2(K_X + L)) > 0$ がいえる．

(b) もし $\kappa(K_X + L) = 3$ なら, $m \geq 2$ なる任意の整数 m に対して, $h^0(2m(K_X + L)) > 0$ が成り立つ．特に $h^0(4(K_X + L)) > 0$ がいえる．

(c) もし $\kappa(K_X + L) = 4$ なら, $m \geq 3$ なる任意の整数 m に対して, $h^0(2m(K_X + L)) > 0$ が成り立つ．特に $h^0(6(K_X + L)) > 0$ がいえる．

(d) もし $\kappa(X) \geq 0$ なら, $m \geq 2$ なる任意の整数 m に対して

$$h^0(2m(K_X + L)) \geq \frac{(m-1)(m-2)(m^2 + 3m + 6)}{12} + 1$$

が成り立つ．特に $h^0(4(K_X + L)) > 0$ がいえる．

では, 主結果の証明について述べよう．Theorem 4.1 の証明においては, 次の基本方針からわかるように, $m_4^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SRE})$ の上限を調べることが重要になる．

(Theorem 4.1 の証明の方針)
(方針 1) (X, L) を 4 次元偏極多様体で仮定 (SRE) をみたすものとする．このとき $m_4^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SRE})$ の上限を調べる．
(方針 2) 不等式 $m_4(\mathrm{SM}) \leq 2m_4^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SRE})$ を示すことにより $m_4(\mathrm{SM})$ の上限を得る．

4.1　(方針 1) について

まず (方針 1) について考える．この問題は $\kappa(K_X + L)$ の値によって手法が異なる．

(I) $0 \leq \kappa(K_X + L) \leq 3$ のときは, X から 3 次元以下の射影多様体 Y へのファイバー空間をつくることができるのでこれを用いて調べる．

Theorem 4.2 $n \geq 4$, (X, L) を n 次元偏極多様体で仮定 (SRE) をみたすもの, そして Y を t 次元正規射影多様体とする．ここで $t \leq 3$ であり, かつ X から Y へのファイバー空間 $f : X \to Y$ (つまり X から Y への全射かつ連結なファイバーをもつ正則写像) と Y 上のある豊富な Cartier 因子 H が存在して $K_X + L = f^*(H)$ をみたすとする．このとき次が成立する．

(1) もし $t \leq 2$ ならば, 任意の正整数 m に対して $h^0(m(K_X+L)) \geq 1$ が成り立つ.

(2) $t=3$ とする.

(2.1) もし $h^1(\mathcal{O}_X) \geq 1$ なら, 任意の正整数 m に対して $h^0(m(K_X+L)) \geq 1$ が成り立つ.

(2.2) もし $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ なら, $m \geq 2$ なる任意の整数 m に対して $h^0(m(K_X+L)) \geq 1$ が成り立つ.

(X, L) を n 次元偏極多様体で仮定 (SRE) をみたすものとする. もし K_X+L が nef ならば基底点自由定理を用いると $\kappa(K_X+L)=t \leq 3$ ならば X から Y へのファイバー空間 $f: X \to Y$ と Y 上のある豊富な Cartier 因子 H が存在して $K_X+L=f^*(H)$ をみたす (ただし, $t=\dim Y$). したがって Theorem 4.2 より次の定理が成立することがわかる.

Theorem 4.3 (X, L) を 4 次元偏極多様体で仮定 (SRE) をみたすとする. さらに K_X+L は nef とする.

(1) もし $0 \leq \kappa(K_X+L) \leq 2$ なら, 任意の正整数 m に対して $h^0(m(K_X+L)) > 0$ が成り立つ.

(2) もし $\kappa(K_X+L)=3$ なら, 2 以上の任意の整数 m に対して $h^0(m(K_X+L)) > 0$ が成り立つ.

(II) 次に $\kappa(K_X+L)=4$ の場合を考える. このときまず次のことが言える.

Theorem 4.4 (X, L) を 4 次元偏極多様体で仮定 (SRE) をみたすものとする. さらに K_X+L は nef かつ big とする. このとき $m \geq 4$ なる任意の整数 m に対して $h^0(m(K_X+L)) > 0$ が成り立つ.

Proof. 証明の流れは以下のようなものである.

(i) $h^0(4(K_X+L)) > 0$ を示す.

(ii) $h^0(3(K_X+L)) > 0$ か, もしくは $h^0(5(K_X+L)) > 0$ が成立することを示す.

(iii) $h^0(3(K_X+L)) > 0$ ならば $h^0(5(K_X+L)) > 0$ が成立することを示す (これと (ii) より $h^0(5(K_X+L)) > 0$ が示せる).

(iv) $h^0(5(K_X+L)) > 0$ ならば 5 以上の任意の整数 m に対して $h^0(m(K_X+L)) > 0$ が成立することを示す.

ここでは (i) がどのように示されるかについて見てみる.
$h^0(4(K_X+L))=0$ とする. このとき Lemma 2.1 より, $h^0(2(K_X+L))=0$ を得る. したがって

$$\begin{aligned} 0 &\geq h^0(2(K_X+L))-h^0(K_X+L), \\ 0 &\leq h^0(3(K_X+L))-h^0(2(K_X+L)), \\ 0 &\geq h^0(4(K_X+L))-h^0(3(K_X+L)) \end{aligned}$$

がいえる. 一方 Theorem 3.2 において $n=4$, $m=1$, $L_1:=(m-2)K_X+(m-1)L$, $H:=K_X+L$ とおくと, つぎの等式を得る.

$$\begin{aligned} &h^0(m(K_X+L))-h^0((m-1)(K_X+L)) \qquad (1)\\ &= g_3(X,K_X+L)+g_2(X,K_X+L,(m-2)K_X+(m-1)L)-h^2(\mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

すると,

$$\begin{aligned} 0 &\geq g_3(X,K_X+L)+g_2(X,L,K_X+L)-h^2(\mathcal{O}_X), \qquad (2)\\ 0 &\leq g_3(X,K_X+L)+g_2(X,K_X+L,K_X+2L)-h^2(\mathcal{O}_X), \qquad (3)\\ 0 &\geq g_3(X,K_X+L)+g_2(X,K_X+L,2K_X+3L)-h^2(\mathcal{O}_X) \qquad (4) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. (2) と (3) より

$$g_2(X,K_X+L,K_X+2L)\geq g_2(X,L,K_X+L). \qquad (5)$$

が成り立ち, (3) と (4) より

$$g_2(X,K_X+L,K_X+2L)\geq g_2(X,K_X+L,2K_X+3L). \qquad (6)$$

を得る. 他方 Proposition 3.1 より

$$\begin{aligned} g_2(X,K_X+L,K_X+2L) &= g_2(X,K_X+L,K_X+L)+g_2(X,K_X+L,L) \qquad (7)\\ &\quad +g_1(X,K_X+L,K_X+L,L)-h^1(\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} g_2(X,K_X+L,2K_X+3L) &= g_2(X,K_X+L,K_X+L)+g_2(X,K_X+L,K_X+2L)\\ &\quad +g_1(X,K_X+L,K_X+L,K_X+2L)-h^1(\mathcal{O}_X) \qquad (8) \end{aligned}$$

がいえることに注意する. すると (5) と (7) より,

$$g_2(X,K_X+L,K_X+L)+g_1(X,K_X+L,K_X+L,L)-h^1(\mathcal{O}_X)\geq 0 \qquad (9)$$

がいえる. (6) と (8) より,

$$g_2(X, K_X + L, K_X + L) + g_1(X, K_X + L, K_X + L, K_X + 2L) - h^1(\mathcal{O}_X) \leq 0 \quad (10)$$

をえる. したがって (9) と (10) から

$$g_1(X, K_X + L, K_X + L, L) - g_1(X, K_X + L, K_X + L, K_X + 2L) \geq 0$$

がいえる. また $K_X + L$ は nef かつ 1-big なので

$$\begin{aligned} & g_1(X, K_X + L, K_X + L, L) - g_1(X, K_X + L, K_X + L, K_X + 2L) \\ & = -\frac{1}{2}(K_X + L)^3(4K_X + 5L) \\ & < 0 \end{aligned}$$

となり, 矛盾がいえる. したがって $h^0(4(K_X + L)) > 0$ がいえる.

(ii), (iii), (iv) についても基本的にこのような議論で示すことができる (詳しくは [16] をみよ). □

さらに $m = 3$ については次のことが言える.

Theorem 4.5 (X, L) を 4 次元偏極多様体で仮定 (SRE) をみたすものとする. さらに $K_X + L$ は nef かつ big とする. このとき $h^0(3(K_X + L)) > 0$ が成り立つ.

まず必要な記号を決めておく.

Notation 4.1 (X, L) を 4 次元偏極多様体で仮定 (SRE) をみたすものとする. このとき $r : X_1 \to X$ を X の特異点解消で $X_1 \setminus r^{-1}(\mathrm{Sing}(X)) \cong X \setminus \mathrm{Sing}(X)$ が成り立つものとし, $L_1 = r^*(L)$ とする.

まず, 次の命題を示すことができる.

Proposition 4.1 (X, L) を 4 次元偏極多様体で仮定 (SRE) をみたすものとする. ここで Notation 4.1 をもちいる. また $K_X + L$ は nef かつ big であると仮定する. このとき X 上の任意の nef 直線束 A_1 と A_2 に対して次が成り立つ.

(i) $c_2(X_1)r^*(A_1)r^*(A_2) \geq -\frac{1}{8}(18K_{X_1}L_1 + 27L_1^2)r^*(A_1)r^*(A_2)$.

(ii) 次のいずれかが成立する.

(ii.1) $c_2(X_1)r^*(A_1)r^*(A_2) \geq -\frac{1}{3}(6K_{X_1}L_1 + 8L_1^2)r^*(A_1)r^*(A_2)$.

(ii.2) X は rationally connected であり, $h^0(K_X+2L)=h^0(K_X+L)=0$ が成り立つ.

Proof. 論文 [16, Proposition 3.2] を参照せよ. □

これを用いて Theorem 4.5 を示す.

Proof. **$h^0(3(K_X+L))=0$ と仮定して矛盾を出す**.
このとき Lemma 2.1 より, $h^0(K_X+L)=0$ を得る. したがって

$$\begin{aligned} 0 &\leq h^0(2(K_X+L))-h^0(K_X+L) \\ 0 &\geq h^0(3(K_X+L))-h^0(2(K_X+L)) \end{aligned}$$

がいえる. また, Theorem 4.4 の証明内の式 (1), つまり

$$\begin{aligned} &h^0(m(K_X+L))-h^0((m-1)(K_X+L)) \\ &= g_3(X,K_X+L)+g_2(X,K_X+L,(m-2)K_X+(m-1)L) \\ &\quad -h^2(\mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

を使うと,

$$0 \leq g_3(X,K_X+L)+g_2(X,K_X+L,L)-h^2(\mathcal{O}_X) \tag{11}$$

$$0 \geq g_3(X,K_X+L)+g_2(X,K_X+L,K_X+2L)-h^2(\mathcal{O}_X) \tag{12}$$

がいえる. (11) と (12) により

$$g_2(X,K_X+L,K_X+2L) \leq g_2(X,K_X+L,L)$$

が成り立つ. 他方, Proposition 3.1 から

$$\begin{aligned} g_2(X,K_X+L,K_X+2L) &= g_2(X,K_X+L,K_X+L)+g_2(X,K_X+L,L) \\ &\quad +g_1(X,K_X+L,K_X+L,L)-h^1(\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

が成り立つので

$$g_2(X,K_X+L,K_X+L)+g_1(X,K_X+L,K_X+L,L)-h^1(\mathcal{O}_X) \leq 0 \tag{13}$$

をえる.
(A) まず (X,L) は Proposition 4.1 の (ii.1) をみたすとする. Notation 4.1 をもちいる. このとき [9, (2.2.A)] と [15, Lemma 3.1] より

$$g_2(X,K_X+L,K_X+L)$$

$$
\begin{aligned}
&= g_2(X_1, r^*(K_X+L), r^*(K_X+L)) \\
&= -1 + h^1(\mathcal{O}_{X_1}) + \frac{1}{12}(K_{X_1} + 3r^*(K_X+L))(K_{X_1} + 2r^*(K_X+L))r^*(K_X+L)^2 \\
&\quad + \frac{1}{12}c_2(X_1)r^*(K_X+L)^2 + \frac{1}{24}(2K_{X_1} + 2r^*(K_X+L))r^*(K_X+L)^3 \\
&\geq -1 + h^1(\mathcal{O}_{X_1}) + \frac{1}{12}(K_{X_1} + 3r^*(K_X+L))(K_{X_1} + 2r^*(K_X+L))r^*(K_X+L)^2 \\
&\quad - \frac{1}{36}(6K_{X_1}L_1 + 8L_1^2)r^*(K_X+L)^2 + \frac{1}{24}(2K_{X_1} + 2r^*(K_X+L))r^*(K_X+L)^3 \\
&= -1 + h^1(\mathcal{O}_{X_1}) + \frac{7}{6}(K_X+L)^4 - \frac{5}{6}(K_X+L)^3L + \frac{1}{36}(K_X+L)^2L^2
\end{aligned}
$$

がえられる．また,

$$
g_1(X, K_X+L, K_X+L, L) = 1 + \frac{3}{2}(K_X+L)^3L. \tag{14}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
& g_2(X, K_X+L, K_X+L) + g_1(X, K_X+L, K_X+L, L) - h^1(\mathcal{O}_X) \\
&\geq -1 + h^1(\mathcal{O}_{X_1}) + \frac{7}{6}(K_X+L)^4 - \frac{5}{6}(K_X+L)^3L \\
&\quad + \frac{1}{36}(K_X+L)^2L^2 + 1 + \frac{3}{2}(K_X+L)^3L - h^1(\mathcal{O}_{X_1}) \\
&= \frac{7}{6}(K_X+L)^4 + \frac{2}{3}(K_X+L)^3L + \frac{1}{36}(K_X+L)^2L^2 \\
&> 0
\end{aligned}
$$

をえる．これは (13) に矛盾する．したがってこの場合はありえない．

(B) 次に (X, L) は Proposition 4.1 (ii.2) をみたすとする．Proposition 4.1 (i) を用いると, [9, (2.2.A)] と [15, Lemma 3.1] から,

$$
\begin{aligned}
& g_2(X, K_X+L, K_X+L) \\
&= g_2(X_1, r^*(K_X+L), r^*(K_X+L)) \\
&\geq -1 + h^1(\mathcal{O}_{X_1}) + \frac{1}{12}(K_{X_1} + 3r^*(K_X+L))(K_{X_1} + 2r^*(K_X+L))r^*(K_X+L)^2 \\
&\quad - \frac{1}{32}(6K_{X_1}L_1 + 9L_1^2)r^*(K_X+L)^2 + \frac{1}{24}(2K_{X_1} + 2r^*(K_X+L))r^*(K_X+L)^3 \\
&= -1 + h^1(\mathcal{O}_{X_1}) + \frac{7}{6}(K_X+L)^4 - \frac{41}{48}(K_X+L)^3L - \frac{1}{96}(K_X+L)^2L^2
\end{aligned}
$$

がえられる．したがって (14) より

$$
\begin{aligned}
& g_2(X, K_X+L, K_X+L) + g_1(X, K_X+L, K_X+L, L) - h^1(\mathcal{O}_X) \\
&\geq \frac{7}{6}(K_X+L)^4 + \frac{31}{48}(K_X+L)^3L - \frac{1}{96}(K_X+L)^2L^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで [15, Theorem 3.2 (i)] より

$$g_2(X, K_X + L, K_X + L) = h^0(3K_X + 2L) - 2h^0(2K_X + L) \tag{15}$$

がいえる．なぜなら X は rationally connected であるからである．
また, $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ に注意すると, もし $g_2(X, K_X + L, K_X + L) \geq 0$ なら, $g_2(X, K_X + L, K_X + L) + g_1(X, K_X + L, K_X + L, L) - h^1(\mathcal{O}_X) \geq g_1(X, K_X + L, K_X + L, L) > 0$ がいえるが, これは (13) に矛盾する．したがって $g_2(X, K_X + L, K_X + L) < 0$ がいえ, (15) から $h^0(2K_X + L) > 0$ がわかる．ここで

$$(K_X + L)^3 L = \left(K_X + \frac{1}{2}L\right)(K_X + L)^2 L + \frac{1}{2}(K_X + L)^2 L^2$$

がいえることに注意する．このとき

$$\begin{aligned} \frac{31}{48}(K_X + L)^3 L &= \frac{31}{48}\left(K_X + \frac{1}{2}L\right)(K_X + L)^2 L + \frac{31}{96}(K_X + L)^2 L^2 \\ &\geq \frac{31}{96}(K_X + L)^2 L^2 \end{aligned}$$

がいえる．したがって

$$\begin{aligned} &g_2(X, K_X + L, K_X + L) + g_1(X, K_X + L, K_X + L, L) - h^1(\mathcal{O}_X) \\ &\geq \frac{7}{6}(K_X + L)^4 + \frac{31}{48}(K_X + L)^3 L - \frac{1}{96}(K_X + L)^2 L^2 \\ &\geq \frac{7}{6}(K_X + L)^4 + \frac{5}{16}(K_X + L)^2 L^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

がいえるが, これもありえない．
　したがって, 以上 (A) と (B) より $h^0(3(K_X + L)) > 0$ を得る． □

(III) $\kappa(X) \geq 0$ については, 論文 [16] をみよ．

4.2 (方針 2) について

　まず Beltrametti, Sommese, 藤田による随伴束の理論から次の結果が成り立つことが知られている．

Theorem 4.6 $(X, \mathcal{L})$ を n 次元偏極多様体とする．ただし $n \geq 3$ とする．このとき $(X, \mathcal{L})$ は次のいずれかをみたす．

(1) $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$.

(2) $(\mathbb{Q}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^n}(1))$.

(3) 非特異射影曲線上の scroll.

(4) Del Pezzo 多様体.

(5) 非特異射影曲線上の quadric fibration.

(6) 非特異射影曲面上の scroll.

(7) $(M, \mathcal{A})$ を $(X, \mathcal{L})$ の縮約とする.

(7.1) $n = 4$, $(M, \mathcal{A}) = (\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2))$.

(7.2) $n = 3$, $(M, \mathcal{A}) = (\mathbb{Q}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(2))$.

(7.3) $n = 3$, $(M, \mathcal{A}) = (\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))$.

(7.4) $n = 3$, M は非特異射影曲線上の $\mathbb{P}^2$-bundle であり, この任意のファイバー F' に対して, $(F', \mathcal{A}|_{F'}) \cong (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$.

(7.5) $K_M \sim -(n-2)\mathcal{A}$, つまり, $(M, \mathcal{A})$ は 向井多様体.

(7.6) $(M, \mathcal{A})$ は非特異射影曲線上の Del Pezzo fibration.

(7.7) $(M, \mathcal{A})$ は正規射影曲面上の quadric fibration.

(7.8) $n \geq 4$ で $(M, \mathcal{A})$ は 3 次元正規射影多様体上の scroll.

(7.9) $K_M + (n-2)\mathcal{A}$ は nef かつ big である.

Proof. [2, Proposition 7.2.2, Theorem 7.2.4, Theorem 7.3.2, Theorem 7.3.4, Theorem 7.5.3], もしくは, [5, Chapter II, (11.2), (11.7), and (11.8)] をみよ. □

Remark 4.1 $(X, \mathcal{L})$ を n 次元偏極多様体とする. ただし $n \geq 3$ とする.

(1) $\kappa(K_X + (n-2)\mathcal{L}) = -\infty$ であるための必要十分条件は $(X, \mathcal{L})$ が Theorem 4.6 の (1) から (7.4) までのいずれかになることである.

(2) $\kappa(K_X + (n-2)\mathcal{L}) = 0$ であるための必要十分条件は $(X, \mathcal{L})$ が Theorem 4.6 の (7.5) になることである.

(3) $\kappa(K_X + (n-2)\mathcal{L}) \geq 1$ であるための必要十分条件は $(X, \mathcal{L})$ が Theorem 4.6 の (7.6) から (7.9) までのいずれかになることである.

さらに 4 次元の場合, 次のことが証明されている.

Theorem 4.7 $(X, \mathcal{L})$ を 4 次元偏極多様体とする. このとき, つぎが成り立つ.

(1) $\kappa(K_X + \mathcal{L}) \geq 0$ であるための必要十分条件はある正規 Gorenstein 射影多様体 W_3 で高々孤立末端特異点のみ持つものと, W_3 上の豊富な因子 $\mathcal{H}_3$ と双有理正則写像 $\Phi : X \to W_3$ が存在して $K_{W_3} + \mathcal{H}_3$ は nef でありかつ任意の正整数 m に対して $h^0(2m(K_X + \mathcal{L})) = h^0(m(K_{W_3} + \mathcal{H}_3))$ が成り立つ.

(2) $\kappa(K_X + \mathcal{L}) = -\infty$ であるための必要十分条件は $(X, \mathcal{L})$ が次のいずれかを満たすことである:

(2.1) $(X, \mathcal{L})$ は Theorem 4.6 の (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7.1), (7.5), (7.6), (7.7), (7.8) のいずれかである.

(2.2) ある正規射影多様体 W_3 で高々孤立 terminal 特異点をもつものと, W_3 上の豊富な因子 $\mathcal{H}_3$, そして双有理正則写像 $\Phi : X \to W_3$ が存在して $(W_3, \mathcal{H}_3)$ は [6, (4.∞)] の (4.2), (4.4.0), (4.4.1), (4.4.2), (4.6.0.0), (4.6.0.1.0), (4.6.0.2.1), (4.6.1), (4.7), (4.8.0) のいずれかである.

するとこのような随伴束の理論, 特に Theorem 4.7 により不等式 $m_4(\mathrm{SM}) \leq 2m_4^{\mathrm{NEF}}(\mathrm{SRE})$ をえることができる.

4.3 まとめ

上記の (方針 1) と (方針 2) を考え, Theorem 4.3, 4.4, 4.5, 4.7 を用いることにより, Theorem 4.1 をえることができる. この系として次の結果を得る.

Corollary 4.1 $m_4(\mathrm{SM}) \leq 6$.

参考文献

[1] T. Arakawa, *Effective nonvanishing of pluri adjoint linear systems,* preprint.

[2] M. C. Beltrametti and A. J. Sommese, *The adjunction theory of complex projective varieties,* de Gruyter Expositions in Math. 16 Walter de Gruyter, Berlin, New York, (1995).

[3] A. Broustet, *Non-annulation effective et positivite locale des fibres en droites amples adjoints,* Math. Ann. 343 (2009), 727-755.

[4] A. Broustet and A. Höring, *Effective non-vanishing conjectures for projective threefolds,* arXiv:0811.3059, to appear in Adv. Geom.

[5] T. Fujita, *Classification Theories of Polarized Varieties,* London Math. Soc. Lecture Note Ser. 155, Cambridge University Press, (1990).

[6] T. Fujita, *On Kodaira energy and adjoint reduction of polarized manifolds,* Manuscripta Math. 76 (1992), 59–84.

[7] Y. Fukuma, *On the nonemptiness of the linear system of polarized manifolds,* Canad. Math. Bull. 41 (1998), 267–278.

[8] Y. Fukuma, *On the sectional geometric genus of quasi-polarized varieties, I,* Comm. Alg. 32 (2004), 1069–1100.

[9] Y. Fukuma, *A formula for the sectional geometric genus of quasi-polarized manifolds by using intersection numbers,* J. Pure Appl. Algebra 194 (2004), 113–126.

[10] Y. Fukuma, *On a conjecture of Beltrametti-Sommese for polarized* 3*-folds,* Internat. J. Math. 17 (2006), 761–789.

[11] Y. Fukuma, *On the dimension of global sections of adjoint bundles for polarized* 3*-folds and* 4*-folds,* J. Pure Appl. Algebra 211 (2007), 609–621.

[12] Y. Fukuma, *Invariants of ample line bundles on projective varieties and their applications, I,* Kodai Math. J. 31 (2008), 219–256.

[13] Y. Fukuma, *On the sectional geometric genus of multi-polarized manifolds and its application,* RIMS Kokyuroku Bessatsu, B9 (2008), 97–113.

[14] Y. Fukuma, *Effective non-vanishing of global sections of multiple adjoint bundles for polarized* 3*-folds,* J. Pure Appl. Algebra 215 (2011), 168–184.

[15] Y. Fukuma, *Remarks on the second sectional geometric genus of quasi-polarized manifolds and their applications,* arXiv:1003.5736.

[16] Y. Fukuma, *Effective non-vanishing of global sections of multiple adjoint bundles for polarized* 4*-folds,* arXiv:1010.4634.

[17] A. Höring, *On a conjecture of Beltrametti and Sommese,* arXiv:0912.1295, to appear in J. Algebraic Geom.

[18] J. Kollár, *Shafarevich Maps and Automorphic Forms,* M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, 1995.

[19] A. Lanteri, M. Palleschi and D. C. Struppa (Eds.), *Geometry of complex projective varieties,* Proceedings of the conference held in Cetraro, May 28–June 2, 1990. Seminars and Conferences, 9. Mediterranean Press, Rende, 1993.

Yoshiaki Fukuma
Department of Mathematics
Faculty of Science
Kochi University
Akebono-cho, Kochi 780-8520
Japan
E-mail: fukuma@kochi-u.ac.jp