NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.34 要約

34. $\mathfrak{U}$-解析学

◎ **height** height の考えはもともと有理数に対してのものだと思うが、それを有限体に戻してくることにより、有限体の超積を使った我々の議論に「大きさ」(ユークリッド距離」を持ち込むことができる。

$p \equiv -1(4)$ なる素数の全体を P_3 とおく。各 $p \in P_3$ に対して、$\mathbb{F}_{p^2}$ 内の -1 の平方根を一つ選び、$\sqrt{-1}$ と書くことにする。$x \in \mathbb{F}_{p^2}$ に対して、その "height" と "logarithmic height" を以下で定義する。

$$\mathrm{Ht}_p(x) = \min \left\{ |a|+|b|+|c|+|d| \;\middle|\; \begin{array}{l} a,b,c,d, \in \mathbb{Z}, \\ bd \notin p\mathbb{Z}, \\ x = a/b + c/d\sqrt{-1} \end{array} \right\},$$

$$\mathrm{ht}_p(x) = \log_p(\mathrm{Ht}_p(x)) \qquad (\text{"logarithmic height"})$$

$\mathbb{F}_{p^2}$ の元 x, y に対して、その 和、差の height は x, y の height による上からの評価式を持つ。実際、

$$(a/b+c/d\sqrt{-1})+(e/f+g/h\sqrt{-1}) = ((af+be)/bf)+((ch+dg)/dh)\sqrt{-1}$$

ゆえ、$\mathrm{Ht}_p(x+y) \le 6\,\mathrm{Ht}_p(x)\,\mathrm{Ht}_p(y)$. logarithmic height でいえば、

$$\mathrm{ht}_p(x+y) \le \mathrm{ht}_p(x) + \mathrm{ht}_p(y) + \log_p(6).$$

同様に、

$$(a/b+c/d\sqrt{-1})(e/f+g/h\sqrt{-1}) = (aedh-cgbf)/bfdh+(agdf+cebh)/bfdh\sqrt{-1}$$

ゆえ、

$$\mathrm{Ht}_p(xy) \le 4\,\mathrm{Ht}_p(x)^2\,\mathrm{Ht}_p(y)^2.$$

logarithmic height でいえば、

$$\mathrm{ht}_p(xy) \le 2\,\mathrm{ht}_p(x) + 2\,\mathrm{ht}_p(y) + \log_p(4).$$

命題 34.1. 任意の $f \in \mathbb{Z}[X]$ に対して、ある正定数 C, D が存在して、任意の p に対して、

$$\mathrm{ht}_p(f(x)) \le C\,\mathrm{ht}_p(x) + \log_p(D)$$

が成り立つ。

系 34.2. P_3 の ultra filter (mod 4 で 3 と等しい ultra-prime number) $\mathfrak{U}$ をとる。

$$(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U},\mathrm{slow}} = \{(x_p) \in (\prod_{p \in P_3} \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U}};\, \lim_{p\to\infty} \mathrm{ht}_p(x_p) = 0\}$$

と定義すると、これは $(\prod_{p\in P_3} \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U}}$ の subring である。

$x = (x_p) \in (\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U},\mathrm{slow}}$ を一つとったとき、各正の実数 M にたいして、次のいずれかが起こる。

(1) $|x_p| \le M$ が $\mathfrak{U}$-ほとんどすべての p についてなりたつ。
(2) $|x_p| > M$ が $\mathfrak{U}$-ほとんどすべての p についてなりたつ。

よって、x にたいして、次のいづれかが起きるということになる。

(超準 1) ある実数 M が存在して、$|x_p| \leq M$ が $\mathcal{U}$-ほとんどすべての p についてなりたつ。
(超準 2) 任意の実数 M にたいして、$|x_p| > M$ が $\mathcal{U}$-ほとんどすべての p についてなりたつ。

超準 1 が起こるとき、x は有限、超準 2 が起きるとき、x は無限であるということにしよう。

$$(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathcal{U},\mathrm{slow},\mathrm{finite}} = \{x \in (\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathcal{U},\mathrm{slow}};\ x \text{ は有限}\}$$

は $(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathcal{U},\mathrm{slow}}$ の subalgebra であり、

$$(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathcal{U},\mathrm{slow},\mathrm{finite}} \to \mathbb{C}$$

なる surjection が極限をとる操作により定まる。その kernel は「無限小全体のなす $(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathcal{U},\mathrm{slow},\mathrm{finite}}$ のイデアル」 である。すなわち、$\mathbb{C}$ は $(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathcal{U},\mathrm{slow},\mathrm{finite}}$ の subquotient である。このような状況は超準解析でよく見られる。

問題 34.1. $(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathcal{U},\mathrm{slow},\mathrm{finite}}$ 上の「解析学」を完成させよ。(とくに、複素解析学、複素多様体論に興味がある。)

疑問:

Harmonic theory のような解析のうち、cohomology のような実は $\mathbb{F}_p$ (もしくは $\mathbb{Z}$) 上で定義されるような話 (例えば、多様体 M 上の Harmonic forms は $H^k(M,\mathbb{R})$ の元を与えるが、$H^k(M,\mathbb{R})$ は $\mathbb{Z}$ 上の $H^k(M,\mathbb{Z})$ を係数拡大したものとみなせる。) は $\mathbb{F}_p$ (もしくは $\mathbb{Z}$) だけですむように出来ないだろうか?