NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.20 要約

20. Weyl-Clifford 環

20.1. The base field $\Bbbk$ and base ring $\Bbbk_1$. 基礎体 $\Bbbk$ とその拡大可換環 $\Bbbk_1$ を固定する。特別の元 $h \in \Bbbk_1$. を選んでおく。h を 0 に特殊化することにより、「可換の場合」にすぐ帰着できるようにしているのである。後のセクションでは、$\Bbbk$ は標数 $p \neq 0$ の体で、$\Bbbk_1$ は 環 $\Bbbk[h, \frac{1}{1-h^{p-1}}]$ を採用することが多いだろう。

定義 20.1. ワイル代数とは、次の代数である。

$$\mathrm{Weyl}_{n+1}^{(h,C)} = \Bbbk_1\langle C, X_0, X_1, \dots, X_n, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n\rangle$$

ただし $X_i, \bar{X}_j$ はつぎの正準交換関係 (canonical commutation relations,CCR) を満たす:

$$[\bar{X}_i, X_j] = hC\delta_{ij} \quad \text{(Kronecker's delta)},$$
$$[\bar{X}_i, \bar{X}_i] = 0, \qquad [X_i, X_j] = 0. \qquad (i, j = 0, 1, 2, \dots, n).$$

C は中心的元である。

上のように、「$\Bbbk$ 上環として $X_1, X_2, \dots$ で生成される環」という記号を本稿では $\Bbbk\langle X_1, X_2, \dots\rangle$ とかく。~~可換のときの記号と同じ記号を使っているが、ここでは X を一般に非可換と考えていることに注意。~~... と行こうと思ったが、直した。

定義 20.2. クリフォード代数とは次の代数である。

$$\mathrm{Cliff}_{n+1}^{(h,C,k)} = \Bbbk_1\langle C, k, E_0, \dots, E_n, \bar{E}_0, \dots, \bar{E}_n\rangle$$

ただし $E, \bar{E}$ たちはつぎの正準反交換関係 (CAR) を満たす:

$$[\bar{E}_i, E_j]_+ = Chk\delta_{ij}$$
$$[\bar{E}_i, \bar{E}_j]_+ = 0, \qquad [E_i, E_j]_+ = 0$$

ここで, C, k は中心的な元である。.

定義 20.3. 非負整数 n, m にたいし、ワイル-クリフォード代数を次のテンソル積で定義する。

$$\mathrm{WC}_{n+1,m+1}^{(h,C,k)} = \mathrm{Weyl}_{n+1}^{(h,C)} \otimes_{\Bbbk_1[C]} \mathrm{Cliff}_{m+1}^{(h,C,k)}.$$

$n = m$ の ときは簡単のため $\mathrm{WC}_{n+1}^{(h,C,k)} = \mathrm{WC}_{n+1,n+1}^{(h,C,k)}$ と書くことにする。

Weyl 環を $\mathbb{A}^{2n}$ 上の非可換関数環であるとみなし、その上の form の空間として Weyl-Cifford 環を採用する。form の反交換関係に現れる k は研究の初期には ただの定数であり、なんなら $k = 0$ とおいても大丈夫かと思っていたのだが、実は後々大事な役割を満たす。

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ は $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{n+1}$ を $\mathbb{G}_m$ で「割る」ものである。その際に Marsden-Weinstein quotient を使うのだが、そのために $\mathbb{G}_m$ 作用の「モーメント写像」を考える必要がある。それは WC_{n+1} の元 μ であって、

$$[\mu, x] = (const) \cdot \mathrm{sdeg}(x)x$$

を満たすものである。ただし sdeg は次のような次数 (“super degree”) である。

変数:	X	$\bar{X}$	E	$\bar{E}$	C
sdeg:	1	-1	1	-1	0

$\mu_{(k,0)} = k\sum_i X_i\bar{X}_i + \sum_i E_i\bar{E}_i$ とおく。moment map としてはこれの定数倍か、それに定数を足したものしかないのがわかる。つまり、moment map としてふさわしい候補は、

$$\mu_{(ak,b)} = a(k\sum_i X_i\bar{X}_i + \sum_i E_i\bar{E}_i) - bC$$

$(a, b \in \Bbbk_1)$ である。この定数をきちんと決める必要があるが、これが意外と悩みの種である。

(a, b) のとり方により 2 つの似て非なる理論を紹介したい。これらを説明するために ρ という定数を固定することにする。

$$\boldsymbol{\mu}_0 = k^\rho \sum_i X_i\bar{X}_i + k^{\rho-1}\sum_i E_i\bar{E}_i$$

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_0 - C$$

当分の間、$\rho = 0$ or 1 である。$\rho = 0$ の時を「有限のばあい」、$\rho = 1$ の場合を「無限小の場合」と呼ぶことにする。

任意の $x \in WC_{n+1}$ に対して、

$$[\boldsymbol{\mu}_1, x] = hk^\rho\,\mathrm{sdeg}(x)x$$

が成り立つ。

Marsden-Weinstein quotient の一般的な処方に従って、

$$A^{\mathrm{pre}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathrm{WC}_{n+1})_{(0)}/(\mu_1)$$

とおく。ただし、$(\mathrm{WC}_{n+1})_{(0)}$ は signed degree についての degree が 0 の部分である。さらに、k-torsion を 取り除いておく

$$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} A^{\mathrm{pre}}/(k\text{-torsions}) = \mathrm{Image}(A^{\mathrm{pre}} \to A^{\mathrm{pre}}[\frac{1}{k}]).$$

大事なので 2 つの場合を別々に説明してみよう。

$\rho = 0$ の場合には、

$\boldsymbol{\mu}_1 = \sum_i X_i\bar{X}_i + \frac{1}{k}\sum_i E_i\bar{E}_i$ である。

$\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p/C^p$ は 有限の値 $(1 - h^{p-1})$ をもつというのが利点である。ただし分数 $\frac{1}{k}\sum_i E_i\bar{E}_i$ が計算の至るところに現れるという欠点をもつ。分数を避けるために $\mu_1 = 0$ の代わりに $k\mu_1 = 0$ から出発したとしても $\sum_i X_i\bar{X}_i - C$ を考えればこれが $\frac{1}{k}\sum_i E_i\bar{E}_i$ の役割を果たすので結局は同じである。

$\rho = 1$ の場合は 分数を扱う必要がなくなり、議論が大変すっきりする。ただし、$\sum_i X_i\bar{X}_i$ が C/k と同程度で、なおかつ後述のように k または h は無限小でなければならないことから、我々の $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の「おおきさ」は h に比べて十分大きい、いわゆる「古典的な場合」を扱っていることになる。