NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.015 要約

15. 選択 2: MOMENT MAP

$\mathbb{A}^{n+1}$ の「form の代数」S が確定した後、今度はそれを「moment map で切らなければ」ならない。幾何学的には、 $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$ の submanifold である球面 (S^{2n+1}) を S^1 で割ることに対応する。

この回は moment map としては何をとるべきか議論する。

考え方としては、super な変数を導入する前と同じものを採用して、

$$\mu_{(\text{あ})} = \sum_i x_i \bar{x}_i - R \tag{あ}$$

が妥当だと思わえるかもしれない。R は定数 ($\Bbbk_1$ の元) で、

$\mathrm{ad}(\mu_{(\text{あ})})$ は定数倍を除いて次のような S の次数付けに対応する。

x_i	$\bar{x}_i$	e_i	$\bar{e}_i$
1	-1	0	0

(あ) による Marsden-Weinstein quotient とは、この degree に関して次数が 0 の S の元の全体を、$\mu_{(\text{あ})} = 0$ という関係式で割った剰余環である。

しかし (あ) を採用するのは我々にとってはさほど嬉しくない。我々の環 A には、$\partial, \bar{\partial}$ の作用が 許容されなければならない。(あ) を認めると、A では $\sum_i x_i \bar{x}_i = R$ が成り立つはずであるから、両辺を ∂ や $\bar{\partial}$ で微分することにより、

$$\sum_i x_i \bar{e}_i = 0, \qquad \sum_i \bar{x}_i e_i = 0$$

を得る。それらによる adjoint をとることにより、任意の $x \in A$ に対して $\partial x = 0$, $\bar{\partial} x = 0$ が成り立つことになり、面白い議論が期待できない。

いまのところ、(あ) の代わりに

$$\mu_{(\text{い})} = k \sum_i x_i \bar{x}_i + \sum_i e_i \bar{e}_i = \tilde{R} \tag{い}$$

が適当だと思われる。$\mathrm{ad}(k \sum_i x_i \bar{x}_i + \sum_i e_i \bar{e}_i - \tilde{R})$ は定数倍を除いて次のような S の次数付けに対応する。

x_i	$\bar{x}_i$	e_i	$\bar{e}_i$
1	-1	1	-1

$\mu_{(\text{い})}$ は ∂-closed かつ $\bar{\partial}$-closed であるから $\mu_{(\text{い})}$ に関する剰余環には (あ) に見られたような不具合はない。さらに、$[\partial, \bar{\partial}] = \frac{1}{h} \mathrm{ad}(\mu_{(\text{い})})$ であるから、S の $\mu_{(\text{い})}$ による Marsden-Weinstein quotient では ∂ と $\bar{\partial}$ は可換である。大変都合がいい。

今回の結論

moment map としては

$$k\sum_i x_i\bar{x}_i + e_i\bar{e}_i - R$$

を採用する。

以下の部分は早まった。($\tilde{R}$ を改めて R と書いたのが混乱の元だった。) 間違いだとわかっているのに書いてしまったり、そのまま説明してしまうのは私の悪いところである。

~~なお、($R=0$ という考えたくないケースを除いて)~~
~~h をうまく調節してスケールを考えることにより、~~
~~$R=1$ としてよいので、以下ではそうする。~~

実際に書きたかったのは次のようなことである。:

コホモロジーの議論は $k=0$ 以外では面白くなさそうなので、$\Bbbk_1[[k]]$ のような環を係数環に据え、k に関する order を考えて $R=k^\rho$ のような形に限定して議論をすることを目論んでいる。