NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.012 要約

12. 根本問題

$\Bbbk_1$ を可換環, $h \in \Bbbk_1$ とする。

非斉次 Weyl 環 $\mathrm{weyl}_{n+1} = \Bbbk\langle x_0, \dots x_n, \bar{x}_0, \dots \bar{x}_n\rangle/(\mathrm{ccr})$ (ただし、ccr は交換関係 $[\bar{x}_i, x_j] = h\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = 0, \quad [\bar{x}_i, \bar{x}_j] = 0$) から始める。

weyl_{n+1} の signed degree が 0 のところをとってくる

$$\mathrm{weyl}_{(0)} = \Bbbk\langle x_0, \dots x_n, \bar{x}_0, \dots \bar{x}_n\rangle_{(0)} = \Bbbk\langle\{x_i\bar{x}_j; i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\}\rangle.$$

ただし、signed degree sdeg は 以下で決まる。

変数:	x	$\bar{x}$
sdeg:	1	-1

つぎに、「moment map が 0 のところ」すなわち $\sum_i x_i\bar{x}_i = R$ のところに切る。

$$A = \mathrm{weyl}_{(0)}\,/(\sum_i x_i\bar{x}_i - R)$$

$\Bbbk_1$ の標数 が $p > 0$ のとき、A の中心は

$$\Bbbk[\{x_i^p\bar{x}_j^p; i, j = 0, \dots, n\}]/(\mathrm{relation})$$

と等しく、その関係式 (relation) は

$$\sum_i x_i^p\bar{x}_i^p = R^p(1 - h^{p-1})$$

で与えられる。

事実 12.1. $A = \mathrm{weyl}_{(0)}\,/(\sum_i x_i\bar{x}_i - R)$ は、$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の affine 開集合

$$\{[a_0 : a_1 : \dots a_n], [\bar{a}_0 : \bar{a}_1 : \dots \bar{a}_n]; \sum_i a_i\bar{a}_i \neq 0\}$$

上の coherent sheaf of algebras $\mathcal{A}$ と対応し、$\mathcal{A}$ の各閉点でのファイバーは は全行列環 M_{p^n} と同型である。

根本問題

事実 12.1 を参考にして $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\,\mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の非可換化を構成せよ。とくに、

- 非斉次ワイル環の Spec の「完備化」に留意すること。
- 超変数を用いた「微分形式の非可換版」をきちんと作ること。

Silly computation

「完備化」でこれからやろうとしていることを可換の場合に見てみよう。多項式環 $B = \Bbbk[X_0, \dots X_n, \bar{X}_0, \dots \bar{X}_n]$

からはじめて、その signed degree が 0 のところをとってくる

$$B_{(0)} = \Bbbk\langle X_0, \dots X_n, \bar{X}_0, \dots \bar{X}_n\rangle_{(0)} = \Bbbk[\{X_i\bar{X}_j; i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\}].$$

これは $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の Segré embedding の像の射影座標環 (あ) である。もう少し詳しく言えば、$(n+1)^2$ 個のあたらしい変数 $\{X_{i,\bar{j}}; 0 \le i, j \le n\}$ を用意して、

$$B_{(0)} = \Bbbk[\{X_i \bar{X}_j; i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\rangle \ni X_i \bar{X}_j \mapsto X_{i\bar{j}} \in \Bbbk[\{X_{i\bar{j}}\}]$$

を考えると、これに対応する Proj が Segré embeddingg を与えるのであった。

つぎに、「moment map が 0 のところ」すなわち $\sum_i X_i \bar{X}_i = 1$ のところに切るわけだが、$\sum_i X_i \bar{X}_i$ (Segré embedding で $\sum_i X_{i,\bar{i}}$ に対応する) 自体も (あ) の線形な座標の一つであるから、$\sum_i X_i \bar{X}_i = 1$ は一つの affine piece を取り出していることと同じである。そこで、新しい余分な変数 C をとって、改めて $\mathrm{Proj}(A_{(0)}[C]/(\sum_i X_i \bar{X}_i = C)$ を考えれば、これはもちろん $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ に戻るというわけである。