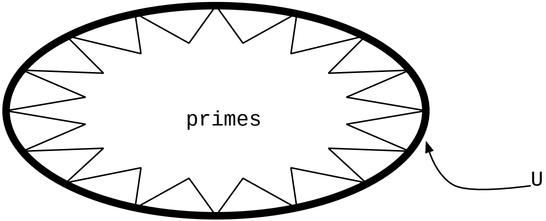
非可換ケーラー多様体

土基 善文

9/28(日) 9:40-9:55

motivation

$\mathfrak{U}$: Spm($\mathbb{Z}$) に離散位相を入れたもののバウンダリの元。



それぞれの $\mathfrak{U}$ に対して $\mathbb{C}_{\mathfrak{U}} = \text{“}\lim_{p\to\mathfrak{U}}\text{''}\overline{\mathbb{F}}_p$ が存在して $\mathbb{C}$ と同型。
$\mathbb{C}_{\mathfrak{U}}$ には解析学があるか。
Hodge 理論によれば

$$H^{ij} \cong \bar{H}^{ji} \qquad (H^{ij} = H^j(X; \Omega^i_X))$$

これを理解したい。

理解のための道具

$$\begin{tikzcd} & & (\mathbb{Z}\text{ での話}) \arrow[dll, bend right, "\text{mod p}"'] \arrow[d, "\text{係数拡大}"] \\ (\text{多くの }\mathbb{F}_p\text{ での話}) \arrow[r, shift right, "\text{ultrafilter}"'] & & (\mathbb{C}_{\mathcal{U}}\text{ での話}) \arrow[ll, shift right, "\text{p 成分}"'] \end{tikzcd}$$

....

理解のための道具

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{($\mathbb{Z}$ での話)} \arrow[dl, bend right, "\text{mod p}"'] \arrow[d, "\text{係数拡大}"] \\
\text{(多くの $\mathbb{F}_p$ での話)} \arrow[r, shift right, "\text{ultrafilter}"'] & \text{($\mathbb{C}_{\mathcal{U}}$ での話)} \arrow[l, shift right, "\text{p 成分}"']
\end{tikzcd}
$$

....

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{($\mathbb{Z}$-線形アーベル圏)} \arrow[dl, bend right, "\text{mod p}"'] \arrow[d, "\text{係数拡大}"] \\
\text{($\mathcal{A}_p$-modules の圏)} \arrow[d, "\text{層}"'] \arrow[r, shift right, "\text{ultrafilter}"'] & \text{($\mathbb{C}_{\mathcal{U}}$ 上の “非可換代数空間”)} \arrow[l, shift right, "\text{p 成分}"'] \arrow[d, dotted, "\text{‘影’}"'] \\
\text{(代数空間 X_p)} \arrow[r, shift right, "\text{ultrafilter}"'] & \text{($\mathbb{C}_{\mathcal{U}}$ 上の代数空間)} \arrow[l, shift right, "\text{p 成分}"']
\end{tikzcd}
$$

目標

- 標数 p (フロベニウスを持つ) と標数 0 (複素共役をもつ) の行き来。
- 合同ゼータの計算
- 具体例の計算

基本的なアイディア

自然にケーラー構造を持つ多様体は非可換多様体の影である。
実際...

基本的なアイディア

自然にケーラー構造を持つ多様体は非可換多様体の影である。
実際...

Proposition

射影代数多様体には非可換多様体が付随する。

例

$\mathbb{C}^n$ にシンプレクティック形式を

$$dX_1 d\overline{X_1} + dX_2 d\overline{X_2} + dX_3 d\overline{X_3} + \cdots + dX_n d\overline{X_n}$$

で入れたものには

$$A_n(\mathbb{k}) = \mathbb{k}\langle X_1, \ldots X_n, \overline{X_1}, \ldots \overline{X_n}\rangle / CCR$$

が対応する。
CCR:

$$[X_i, X_j] = 0, \quad [\bar{X}_i, \bar{X}_j] = 0, \quad [\bar{X}_i, X_j] = \delta_{ij}.$$

射影空間

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) &= (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times \\ &\cong (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})//S^1\end{aligned}$$

symplectic quotient

$$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}//S^1 = \mu^{-1}(0)/S^1 \cong S^{2n+1}/S^1$$

射影空間の非可換バージョン

$$A = A_{n+1}(\Bbbk) = \Bbbk\langle X_0, X_1, \dots X_n, \overline{X_0}, \dots, \overline{X_n}\rangle / CCR$$

$$\mu_R = X_0\overline{X_0} + \cdots + X_n\overline{X}_n - R$$

$J = A_{n+1}(\Bbbk)\mu_R$

$$A//J = \mathbb{I}_A(J)/J \cong \mathrm{End}_{A\text{-}}(A/J)$$

$\mathrm{Spec}(A//J)$ が $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の非可換バージョンである。ただし、この構成は 標数 0 で考える。(標数 p のものは標数 0 で構成してから mod p する。)

検索してね

$\mathrm{Spec}(A//J)$ は完備ではない。
完備化して shadow がちょうど $\mathbb{P}^n \times \overline{\mathbb{P}^n}$ のものができる。
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ を影に持つ非可換多様体の詳しい構成はアブストラクトにあります。
もしくは、google で検索してね。

一般の射影多様体に対しては

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の algebra の sheaf $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$ の $\mathcal{A} \cdot I$ による制限

$$\mathcal{A} // \mathcal{A} \cdot I$$

を考えるという事もできる (アブストラクトに書いたアイディア) が、どうやら、

$$\mathcal{A} / \mathcal{A} \cdot (I^p + \bar{I}^p)$$

のほうが良さそうです。...

一般の射影多様体に対しては

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の algebra の sheaf $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$ の $\mathcal{A} \cdot I$ による制限

$$\mathcal{A}//\mathcal{A} \cdot I$$

を考えるという事もできる (アブストラクトに書いたアイディア) が、どうやら、

$$\mathcal{A}/\mathcal{A} \cdot (I^p + \bar{I}^p)$$

のほうが良さそうです。...

Proposition

すべての射影代数多様体に対して、上記のような方法で非可換な対象を作ることができる。

現在の問題...

一般の射影多様体に対しては

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の algebra の sheaf $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$ の $\mathcal{A} \cdot I$ による制限

$$\mathcal{A} // \mathcal{A} \cdot I$$

を考えるという事もできる (アブストラクトに書いたアイディア) が、どうやら、

$$\mathcal{A} / \mathcal{A} \cdot (I^p + \bar{I}^p)$$

のほうが良さそうです。...

Proposition

すべての射影代数多様体に対して、上記のような方法で非可換な対象を作ることができる。

現在の問題...

問題

一つ一つの具体的な代数多様体に対し、上記対象を解析せよ。