環論 NO.6 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$《準同型とその核と像》

定義 6.1. R, S はともに (可換とは限らない) 環であるとし、$f : R \to S$ をその間の写像とする。このとき、f が R から S への **(環) 準同型写像**であるとは、次の条件が成り立つときにいう。

(1) f は $(R, +)$ から $(S, +)$ への群としての準同型である。すなわち、

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

が、すべての R の元 a, b について成り立つ。

(2) f は R の積を S の積にうつす。すなわち、

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

が、すべての R の元 a, b について成り立つ。

(3) f は (R の) 単位元を (S の) 単位元にうつす。すなわち、

$$f(1_R) = 1_S$$

が成り立つ。

定義 6.2. 環のあいだの全単射準同型のことを、(環としての) **同型**とよぶ。容易にわかるように、環のあいだの同型 $f : R \to S$ が与えられたとき、f の逆写像 f^{-1} は S から R への同型になる。

群 (加法群) についての準同型の知識を使うと、次のことは直ちにわかる。

補題 6.3. 環準同型 $f : R \to S$ について、

(1) $f(0_R) = 0_S$ が成り立つ。

(2) $f(-a) = -f(a)$ が全ての $a \in R$ に対して成り立つ。

定義 6.4. 環準同型 $f : R \to S$ について、$f^{-1}(0) (= \{r \in R; f(r) = 0\})$ のことを、f の**核 (Kernel)** と呼び、 $\mathrm{Ker}(f)$ で書き表す。

f の**像 (Image)** とは、通常通り、

$$\mathrm{Image}(f) = \{f(r); r \in R\}$$

のことである。

補題 6.5. 任意の環準同型 $f : R \to S$ にたいして、

(1) $\mathrm{Ker}(f)$ は R のイデアルである。

(2) $\mathrm{Image}(f)$ は S の部分環である。

環 R 上の一変数多項式環 $R[X]$ とは、R の元と、一つの変数 X とで生成される環であった。同様に $R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ を定義することができる。その出自から当然、次の補題が成り立つ

補題 6.6. 任意の環 R について、$R[X][Y] \cong R[X, Y]$ という自然な同型が存在する。もっと一般に $R[X_1, X_2, \ldots, X_n] \cong R[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}][X_n]$ がなりたつ。

命題 6.7 (代入原理)**.** 環 S とその部分環 R が与えられているとする。このとき、任意の S の元の n 個の組 $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ にたいして、次のような環準同型 $\psi_s[X_1, X_2, \ldots, X_n] \to S$ が唯一つ存在する。

(1) $\psi(r) = r \qquad (\forall r \in R)$,

(2) $\psi(X_j) = s_j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

さらに、ψ は次のような形で与えられる。

$$\psi(p) = p(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

例 6.8. $\mathbb{R}[X]$ から $\mathbb{C}$ への写像 f を、

$$f(p) = p(\sqrt{-1})$$

で定めると、次のことが分かる。

(1) f は写像としてうまく定義されている。
(2) f は環の準同型である。
(3) f の像は $\mathbb{C}$ 全体である。
(4) f の核は $(X^2+1)\mathbb{R}[X]$ である。