体論要約 NO.12

(前回は、Galois の基本定理の骨格を説明しました。今回は、補足的に、肝になる部分をかんたんに説明したいと思います。)

補題 12.1 (補題 10.2 と同じもの。)**.** K は体であるとし、 L は K のガロア拡大とする。$G = \mathrm{Gal}(L/K)$ をガロア群、$H \subset G$ をその部分群とする。このとき、

(1) L^H は K と L の中間体である。
(2) $[L : L^H] = |H|$.

証明. (1) は省略する。
(2)$\exists \gamma \in L$ such that $L = L(\gamma)$.

$$f(X) = \prod_{\sigma \in H} (X - \sigma(\gamma))$$

とおくと、 $f \in L^H[X]$ であって、モニックであることがわかる。$f(\gamma) = 0$ であるから、$[L : L^H] \leq \deg f = |H|$.

つぎに γ の K 上の 最小多項式を $m(X)$ とおくと、定義により $m(\gamma) = 0$ であり、そこからさらに任意の $\sigma \in H$ に対して $m(\sigma(\gamma)) = 0$ であることがわかるから、$f|m$ 。次数の関係から $|H| = \deg(f) \leq \deg m = [L : L^H]$. □ □

補題 12.2. K は体であるとし、 L は K のガロア拡大とする。 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ をガロア群とする。このとき、L と K の間の任意の中間体 M に対して、

(1) L は M のガロア拡大である。
(2) $\exists \gamma \in L$ such that $L = M(\gamma)(= M[\gamma])$.
(3) $|\mathrm{Gal}(L/M)| = [L : M] = \deg(m)$ (m は γ の K 上の最小多項式)

証明. (1) 定義をみよ。
(2) $\#K < \infty$ のときは補題 7.10 を用いる。有限体のときについてはここでは詳しくは述べない (L も 有限体であることから、$L^\times$ が有限巡回群であることがわかり、そのことからすぐにわかる。)
(3)

$$\varphi : G \ni \sigma \mapsto \sigma(\gamma) \in \{(\gamma \text{ の } K \text{ 上の共役}\}$$

を考えると、φ は全単射である。(定理 2.9 を用いる). □

補題 12.3. ガロア対応

$$\{H \subset G | \text{ 部分群}\} \underset{\mathrm{Gal}(L/M) \leftarrow\!\shortmid M}{\overset{H \mapsto L^H}{\rightleftarrows}} \{M \subset L | L \text{ と } K \text{ の中間体}\}$$

において、H が M に対応する時、右辺の $\sigma(M)$ に対応するのは $\sigma H \sigma^{-1}$ である。すなわち $\mathrm{Gal}(L/\sigma(M)) = \sigma H \sigma^{-1}$