体論要約 NO.2 付録

この付録では次のことの証明を一応載せておこう。

命題 2.5. 体 K の拡大体 L と K 上の代数的な元 $\alpha \in L$ が与えられているとする。このとき、

(1) α の最小多項式 $f_0(X)$ は既約である。
(2) $f \in K[X]$ が $f(\alpha)=0$ を満たすならば、 f は α の最小多項式 f_0 で割り切れる。
(3) とくに $f \in K[X]$ が $f(\alpha)=0$ を満たして、かつ f が K 上既約ならば, f は f_0 の定数倍である。 (f, f_0 がともにモニックとすれば両者は等しい。)

証明. (1) もし f_0 が可約ならば、ある $g, h \in K[X]$ が存在して、

$$f_0 = gh, \quad (\deg(g) < \deg(f_0), \quad \deg(h) < \deg(f_0))$$

両辺に $X=\alpha$ を代入して

$$0 = f_0(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha)$$

という L の元の等式が成り立つ。L は体であるから、$g(\alpha)=0$ or $h(\alpha)=0$ がなりたつ。(つまり α は f_0 よりも次数の低い関係式を満たす。) これは f_0 のとり方に反する。

(2) f を f_0 で割り算すると、

$$f = qf_0 + r \qquad (\exists q, r \in K[X], \deg(r) < \deg(f_0)$$

という等式ができる。両辺に $X=\alpha$ を代入すると

$$f(\alpha) = q(\alpha)f_0(\alpha) + r(\alpha).$$

仮定により、$f(\alpha)=0, f_0(\alpha)=0$ であるから、結局 $r(\alpha)=0$ がわかる。$\deg(r) < \deg(f_0)$ と $r(\alpha)=0$, そして f_0 の最小性から $f=0$ が従う。

□

系 2.10. モニックな多項式 f が $f(\alpha)=0$ を満たすとき、f: 既約 $\Leftrightarrow$ f: α の最小多項式

定理と系ともに、環の準同型定理と、「体は整域であること」「整域の部分環はまた整域であること」を使ったほうが (環論の続きとしての) 本講義の趣旨に沿うことになるが、詳細はご研究におまかせする。