

[古い] 体論: 中間試験的なレポート問題 [2023 年度]

- 言うまでもないことだが、数値的な答だけでは十分ではない。論理的な説明がもっと大事である。
- とくに、「...は既約である。」と書く場合には、理由を添えると加点される。(本題に関係のないことを書いている場合を除く。)
- maxima などの数式処理ソフトを用いてもよいが、肝心なところは自分でチェックや証明をすること。(必須ではないがもし使った場合には使用ソフトを挙げてください。)

問題 23.1. \mathbb{Q} 上の多項式

$$f(X) = X^5 - X + 1$$

の根の一つを α とする。

- (1) f は \mathbb{Q} 上既約であることを証明せよ。
- (2) $\mathbb{Q}[\alpha] \cong \mathbb{Q}[X]/(X^5 - X + 1)$ であることを環論を用いて証明せよ。
- (3) $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}[\alpha]$ であることを証明せよ。
- (4) 拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ を求めよ。