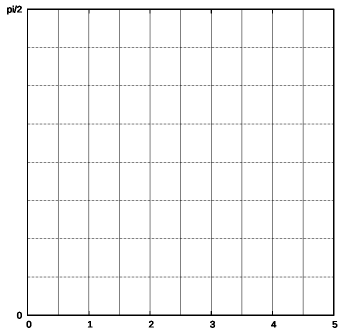
多変数の微分積分学 NO.13 要約

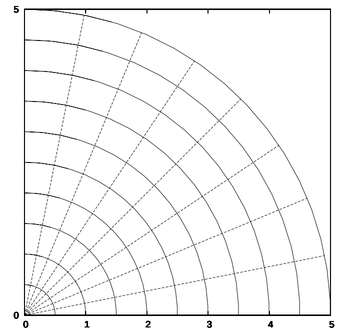
今日のテーマ 多変数関数の (リーマン) 積分 (5) 変数変換 (つづき)。

変数変換

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

を図示すると、次のよう (左図から右図に変換) になる。





小さな区間長方形 $[r_0, r_0 + dr) \times [\theta_0, \theta_0 + d\theta)$ 上では上の変換はおおむね線形変換

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$$

で近似され、よってその面積は変換によってほぼ r_0 倍になる。

$$D = \{(x, y); x > 0, y > 0, \sqrt{x^2 + y^2} < R\}$$

上の積分

$$\int_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

は長方形

$$\tilde{D} = \{(r, \theta); 0 < r < R, 0 < \theta < \pi/2\}$$

上の積分

$$\int_{\tilde{D}} e^{-r^2} r dr d\theta$$

となる。これは容易に (累次積分により) 積分されて答は

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})$$

である。

最後の答えは一変数の積分にも応用される。:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を得る。