多変数の微分積分 NO.9 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 逆写像の定理, 陰関数の定理。

定義 9.1. (1) $\mathbb{R}^m$ のベクトル $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m), w = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ に対して二つの**内積**を $\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^m v_j w_j$ で定義するのであった。。

(2) $\mathbb{R}^m$ のベクトル v のノルムを $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ で定義する。

(3) (v, w のこの講義で用いられる距離(ユークリッド距離) は $d(v, w) = ||v - w||$ で定義するものと一致する。)

(4) 行列 $P \in M_{l,m}(\mathbb{R})$ に対し、その**作用素ノルム** を

$$||P|| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^l \\ ||v|| \le 1}} ||P \cdot v||$$

で定義する。

一般に、ベクトルや行列に対するノルムの定義はいくつもあり、その時々に便利なものを用いるのが良い。ここでは横着して上のもののみを考えることにする。

補題 9.2. (1) 内積は双線型である。

(2) ベクトルに対してのノルム $v \mapsto ||v||$ はノルムの公理を満たす。すなわち、
 (a) $\forall v \in \mathbb{R}^m \ ||v|| \ge 0.$
 (b) $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$
 (c) $\forall v, w \in \mathbb{R}^m \quad ||v + w|| \le ||v|| + ||w||.$
 (d) $\forall c \in \mathbb{R} \forall v \in \mathbb{R}^m \quad ||cv|| = |c| \cdot ||v||.$

(3) 行列 P に対して、その作用素ノルムは常に有限であり、$P \mapsto ||P||$ はノルムの公理を満たす。

(4) 任意の行列 P と *(*それと乗算可能なサイズを持つ*)* 任意のベクトルに対して $||P \cdot v|| \le ||P|| \cdot ||v||$ が成り立つ。

定理 9.3. *[*逆関数の定理 (part 1) 存在性))*]* U は $\mathbb{R}^m$ の開集合であるとし、$f : U \to \mathbb{R}^m$ は C^1 級であるとする。*(*定義域と値域の次元が同じであることに注意。*)* $x_0 \in U$ において、 $Df|_{x_0}$ が行列として可逆であると仮定し、その逆行列を L とおく。正の実数 r_0 を次のような条件を満足するようにとる。

$$x \in B_0 \overset{\text{def}}{=} B_{r_0}(x_0) \implies \begin{cases} x \in U & (\text{つまり、} B_{r_0}(x_0) \subset U.) \\ ||1_m - Lf'(x)|| < \frac{1}{2} \\ ||f(x) - f(x_0)|| < \frac{1}{2||L||} \end{cases}$$

(f が C^1 級だという仮定によりこのような r_0 は存在する。) このとき、

(1) f は B_0 上単射である。

(2) $r_1 = \frac{r_0}{2||L||}$, $B_1 = B_{r_1}(f(x_0))$ とおくと、B_1 上定義された C^1 級関数 g が存在して、

$$f \circ g|_{B_1} = id_{B_1}$$

がなりたつ。

定理 9.3 の証明のキモは、以下の補題 (Newton 法) である。ただし、Df_x の逆行列のところを、L で置き換える部分が、本物の Newton 法とは異なる。

以下、定理 9.3 の証明のために 2 つの補題を述べる。とりあえず $y_1 \in B_1$ を固定する。

補題 9.4. 次のような B_0 上の $\mathbb{R}^m$ 値関数を考えよう。

$$\Phi(x) = x + L(y_1 - f(x)) \qquad (x \in B_0)$$

すると、任意の $x_1, x_2 \in B_0$ に対して $||\Phi(x_1) - \Phi(x_2)|| < 1/2||x_1 - x_2||$ である。言い換えれば、Φ は縮小写像である。

証明. 実際

$$\begin{aligned}
||\Phi(x_1) - \Phi(x_2)|| &= ||x_1 - x_2 - L(f(x_1) - f(x_2)|| \\
&= ||x_1 - x_2 - L\int_0^1 f'(x_2 + t(x_1 - x_2))dt(x_1 - x_2)|| \\
&= ||\int_0^1 (1_n - Lf'(x_2 + t(x_1 - x_2)))dt(x_1 - x_2)|| \\
&\leq \int_0^1 ||1_n - Lf'(x_2 + t(x_1 - x_2)))||dt||(x_1 - x_2)|| \\
&\leq 1/2||(x_1 - x_2)||
\end{aligned}$$

□

補題 9.5. 縮小写像はかならず固定点をただ一つ持つ。*(*やってみよう問題参照。*)*

補題 9.4, 9.5 により、$\forall y_1 \in B_1$ に対して $y_1 = f(x_1)$ をみたす $x_1 \in \mathbb{R}^n$ がただ一つ存在することがわかる。y_1 に x_1 を対応させる写像が g である。

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) + o(||x_2 - x_1||)$$

を逆に見ることで g の連続性、微分可能性を得ることができる。(詳しくは 1 変数のときと同様)

定理 9.6.

$$f \circ g = \mathrm{id}$$

のとき、

$$Dg|_y = (Df|_{g(y)})^{-1}$$

とくに、f が C^n 級なら、g も C^n 級である。

逆写像定理では、定義域と値域の次元が等しく、なおかつ点 x_0 での f の微分 $Df|_{x_0}$ が可逆であることが適用のポイントである。しかし、下のような考え方を用いて、定義域と値域の次元が違う場合にも、逆関数の定理を応用することができる。ここでは大まかな考え方のみ書いておこう。(詳細は乞御研究)

命題 9.7. *(*陰関数の定理*)* $f : \mathbb{R}^{n+s} \to \mathbb{R}^n$ が C^∞ 級で、なおかつ線型写像

$$\hat{f} : (x, y) \to (f(x, y), y) \in \mathbb{R}^{n+s} \quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^s)$$

が $\det(D\hat{f}|_{(x_0, y_0)}) \neq 0$ を満足したとする。$c = f(x_0, y_0)$ とおこう。このとき $\hat{f}$ の局所的な逆写像

$$\hat{g} : (x, y) \to (g(x, y), y) \quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^s)$$

が存在する。すなわち、$f(g(x, y), y) = x$ が (c, y_0) に近いすべての x, y に対して成り立つ。とくに、$h(y) = g(c, y)$ は

$$f(h(y), y) = c$$

をすべての y について満足する。これは、方程式 $f(x, y) = c$ を y について解いたことに相当する *(*陰関数*)*。

逆写像の定理や陰関数の定理は微分可能多様体の理論 (とくに埋め込みや沈め込みの議論、特異点の議論など) において基本的になる。