

多変数の微分積分演習問題 NO.4

問題 4.1. \mathbb{R}^2 上の関数 $f(x, y) = e^{xy}$ について

- f を x について偏微分せよ。
- f を y について偏微分せよ。

問題 4.2. \mathbb{R}^2 上の関数 $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2 + 7x + 8$ について

- f を x について偏微分せよ。
- f を y について偏微分せよ。

問題 4.3. \mathbb{R}^2 上の関数 $f(x, y) = e^{xy}$ を全微分せよ。

問題 4.4. \mathbb{R}^2 上の関数 $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2 + 7x + 8$ について f を全微分せよ。

問題 4.5. \mathbb{R}^3 上の関数 $f(x, y, z) = \sin(x + yz)$ を全微分せよ。

問題 4.6. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $f(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ ($(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$) で定義する。このとき、 f の \mathbb{R}^2 の各点 (r_1, θ_1) における(全)微分 $Df|_{(r_1, \theta_1)}$ を求めよ。

問題 4.7. 前小問において、 $Df|_{(r_1, \theta_1)}$ の行列式を求めよ。

問題 4.8. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $f(r, \theta, \phi) = (r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta))$ で定義する。 f の各点における微分 Df とその行列式を求めよ。

問題 4.9. $n \geq 2, m \geq 2$ について、写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を具体的に上げ、その(全)微分 Df をもとめよ。(f としては微分可能なものを挙げる。微分可能性については議論しなくてもよい。)

一人1個を限度とするが、本年度履修生全体としては何個上げていただいても構わない。ただし、オリジナリティー、簡明さを考慮すること。(つまり似たようなものは一個にカウントされないのでご注意ください。) なお、本問題を解く2名目以降は口述の解答のあと、moodleにて(予備的課題)の提出欄に「 f と答え」を提出すること。おもに重複を避けるためだが、計算間違いも場合によってはcheckし、ひどい場合には解答の回数に加えない。)

問題 4.10. $n \geq 2$ について、写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を具体的に上げ、その(全)微分 Df をもとめよ。さらに、 Df の行列式を求めよ。

(f としては微分可能なものを挙げる。微分可能性については議論しなくてもよい。)

($\det(Df)$ のことをヤコビ行列式(ヤコビアン)ともいう。 Df のことはヤコビ行列とも言うのであった。区別をしておくように。)

一人1個を限度とするが、本年度履修生全体としては何個上げていただいても構わない。ただし、オリジナリティー、簡明さを考慮すること。(つまり似たようなものは一個にカウントされないのでご注意。)さらに、前小問と(解答者にとって)同じものは避けること。なお、本問題を解く2名目以降は口述の解答のあと、modleにて(予備的課題)の提出欄に「 f と答え」を提出すること。おもに重複を避けるためだが、計算間違いも場合によってはcheckし、ひどい場合には解答の回数に加えない。前小問と同一のファイルにするのも避けてください)

※なお上記2つの問題に共通することですが、解答はできるだけ数式処理ソフト等を用いて計算が正しいことを確かめておいてください。