

多変数の微分積分演習問題 NO.3

問題 3.1. \mathbb{R}^2 上の関数 $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ は連続である。

問題 3.2. \mathbb{R}^2 上の関数 $g(x_1, x_2) = x_1x_2$ は連続である。

問題 3.3. A を \mathbb{R}^n の開集合、 $f_1: A \rightarrow \mathbb{R}$ $f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であるとする。 A 上の関数 $f: A \ni x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$ は連続であることを問題 3.1 を用いて証明しなさい。

問題 3.4. A を \mathbb{R}^n の開集合、 $f_1: A \rightarrow \mathbb{R}$ $f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であるとする。 A 上の関数 $f: A \ni x \mapsto f_1(x)f_2(x)$ は連続であることを問題 3.2 を用いて証明しなさい。

問題 3.5. \mathbb{R}^2 上の多項式関数は全て連続である。

問題 3.6. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、 \mathbb{R}^n 上の多項式関数は全て連続である。

問題 3.7. \mathbb{R}^n の部分集合 A から \mathbb{R}^m の部分集合 B への写像 $f: A \rightarrow B$ が与えられているとする。このとき、 f が講義 No.3 の定義 3.1 の意味で連続ならば、 f による (B) の開集合 U の逆像 $f^{-1}(U)$ はすべて A の開集合である。(つまり f は通常の意味で連続である。)

問題 3.8. \mathbb{R}^n の部分集合 A から \mathbb{R}^m の部分集合 B への写像 $f: A \rightarrow B$ が与えられているとする。このとき、 f が通常の意味で連続なら、講義 No.3 の定義 3.1 の意味で連続である。

問題 3.9. 位相空間 X がコンパクトであるということの定義を調べて、述べよ。

問題 3.10. \mathbb{R} の部分集合 A がコンパクトならば、 A は有界閉集合である。

問題 3.11. \mathbb{R} の部分集合 A が有界閉集合ならば、 A はコンパクトである。

問題 3.12. コンパクト集合の連続写像による像はコンパクトである。

問題 3.13. 上記 3 つの問いの結果として、任意のコンパクト集合上の任意の連続関数は最大値を持つ。

問題 3.14. コンパクト集合の和集合はコンパクトである。

問題 3.15. 2 つのコンパクト集合の直積集合はコンパクトである。

問題 3.16. コンパクト集合の共通部分は必ずコンパクトだろうか。