

弱固有空間についての補足。

採点のとき、

$$W = \{v \in \mathbb{C}^n; \exists N > 0; B^N v = 0\}$$

のタイプの集合の扱いに困っている人が多かったので少しだけ補足しておきます。いずれもすぐにわかることだが、使う場合には各自確かめて使ってください。

- 決まった正整数 N にたいして、

$$\{v \in \mathbb{C}^n; B^N v = 0\} = \text{Ker}(B^N)$$

である。左辺に当たるものをわざわざ定義している方を見かけたが、単純に Ker を用いて書くことができます。

- $\text{Ker}(B) \subset \text{Ker}(B^2) \subset \text{Ker}(B^3) \subset \dots$ にも注意しておこう。
- \exists という記号と \cup は仲が良い。すなわち、

$$\begin{aligned} & \{v \in \mathbb{C}^n; \exists N > 0; B^N v = 0\} \\ &= \bigcup_{N \in \mathbb{Z}_{>0}} \{v \in \mathbb{C}^n; \exists N > 0; B^N v = 0\} \\ &= \bigcup_N \text{Ker}(B^N) \end{aligned}$$

- ある k が存在して、 $\text{Ker}(B^k) = \text{Ker}(B^{k+1}) = \dots$ よって、 $W = \text{Ker}(B^k)$ である。
- この集合 W はベクトル空間である。