線形代数学 II NO.6 要約

今日のテーマ: 直交射影を表す行列 (2)

ベクトル空間 V の基底 $B = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ が与えられたとき、V の元 $\sum_i c_i \mathbb{v}_i$ は $\mathbb{R}^n$ の元 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ と同一視されるのでした。V が計量ベクトル空間で、B が正規直交基底 (ONB) ならば、V の内積は $\mathbb{R}^n$ の標準内積に対応します。$\mathbb{R}^n$ の元 $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2$ の標準内積は、行列の積を用いて $\mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_2 = {}^t\mathbb{u}_1 \mathbb{u}_2$ と書くことができることにも注意しておきます。

先週に引き続き以下でも、標準的な内積を用いる。

P の像 (Image) と核 (Kernel) の定義にも注意しておこう。$\mathbb{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

- $\mathbb{v} \in \operatorname{Image} P \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathbb{v} = P\mathbb{x} (\exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n)$
- $\mathbb{v} \in \operatorname{Ker} P \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} P\mathbb{v} = \mathbf{0}$

補題 6.1. n 次正方行列 P は $P^2 = P$ を満たすとき**べき等**であるという。P がべき等で、$Q = E_n - P$ とおくとき:

(1) Q もべき等である。
(2) $PQ = 0, QP = 0$.
(3) $\operatorname{Image}(P) + \operatorname{Image}(Q) = \mathbb{R}^n$.
(4) $\operatorname{Image}(P) \cap \operatorname{Image}(Q) = \{\mathbf{0}\}$.
(5) $\operatorname{Image}(P) \perp \operatorname{Image}(Q)$ と ${}^tP = P$ とは同値.

正方行列 P について、つぎのことにも注意しておく。(上記補題の幾何学的な言い換え)

- $P^2 = P \Leftrightarrow P$ が $\operatorname{Image}(P)$ の各元を変えない
- P がべき等なら、$\mathbb{v} \in \operatorname{Image} P \Leftrightarrow \mathbb{v} = P\mathbb{v}$.
- P がべき等のとき、$Q = E_n - P$ とおけば、
  ${}^tP = P \Leftrightarrow P = {}^tPP \Leftrightarrow (Q\mathbb{v}, P\mathbb{w}) = 0 \ (\forall \mathbb{v}, \mathbb{w} \in \mathbb{R}^n)$