

## 線形代数学 II NO.1 要約

今日のテーマ: 授業の目標, ベクトル空間及び線形写像の復習。

「スカラー」の集合を一つ決めておかなければならない。

**定義 1.1.**  $K$  が体であるとは、 $K$  が和、差、積、商について閉じた集合であるときにいう。詳しくいうと  $K$  が体であるとは、 $K$  が和 (+)、積 2 つの演算について閉じていて、以下の条件を満たすときに言う。詳しくは体論でやる。

- (1)  $K$  は和について可換群である。すなわち
  - (a) 和は結合的である。  $(a + b) + c = a + (b + c)$  ( $\forall a, b, c \in K$ ).
  - (b)  $K$  には  $0_K$  と呼ばれる特別の元があって、  $x + 0_K = x = 0_K + x$  ( $\forall x \in K$ ) がなりたつ。
  - (c)  $K$  の任意の元  $x$  に対して、その反元  $-x$  と呼ばれる元が存在して、  $x + (-x) = 0_K = (-x) + x$  を満たす。
- (2)  $K$  は積について可換半群である。つまり、結合法則  $a(bc) = (ab)c$  ( $\forall a, b, c \in K$ ) がなりたつ。
- (3) 分配法則  $a(b + c) = ab + ac$ ,  $(b + c)a = ba + ca$  ( $a, b, c \in K$ ) が成り立つ。
- (4)  $K \setminus \{0\}$  は積について群である。つまり
  - (a)  $K$  には  $1_K$  と呼ばれる特別の元があって、  $x \cdot 1_K = x = 1_K \cdot x$  ( $\forall x \in K$ ) がなりたつ。
  - (b)  $K$  の任意の元  $x$  に対して、その逆元  $x^{-1}$  と呼ばれる元が存在して、  $x \cdot (x^{-1}) = 1_K = (x^{-1}) \cdot x$  を満たす。

本講義では  $K$  としては  $\mathbb{R}$  をよく用いるが、 $K = \mathbb{C}$  の場合を考えることも時には必要である。

$K = \mathbb{R}$  としたときのベクトル空間を  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とか、**実ベクトル空間**といい、 $K = \mathbb{C}$  としたときのベクトル空間を  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間とか、**複素ベクトル空間**と呼ぶ。

**ベクトル空間**とは、その中で和とスカラー倍ができるような集合のことである。ただし和とスカラー倍は次の法則を満たす必要がある。

- (1)  $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$  ( $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ ).
- (2)  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$  ( $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ ).
- (3)  $\exists 0_V \in V$  such that  $0_V + \mathbf{v} = \mathbf{v} + 0_V = \mathbf{v}$  ( $\forall \mathbf{v} \in V$ ).
- (4) 任意の  $\mathbf{v} \in V$  にたいして  $-\mathbf{v}$  という  $V$  の元が取れて  $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = 0_V$  を満たす。
- (5)  $c_1 \cdot (c_2 \cdot \mathbf{v}) = (c_1 \cdot c_2) \cdot \mathbf{v}$  ( $\forall c_1, c_2 \in K, \forall \mathbf{v} \in V$ ).
- (6)  $1_K \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$  ( $\forall \mathbf{v} \in V$ )
- (7)  $(c_1 + c_2) \cdot \mathbf{v} = c_1 \mathbf{v} + c_2 \mathbf{v}$  ( $\forall c_1, \forall c_2 \in K, \forall \mathbf{v} \in V$ )  
 $c \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = c \mathbf{v}_1 + c \mathbf{v}_2$  ( $\forall c \in K, \forall \mathbf{v}_1, \forall \mathbf{v}_2 \in V$ )

ベクトル空間  $V, W$  にたいして、 $V$  から  $W$  への**線形写像**とは、 $V$  から  $W$  の写像であって、和とスカラー倍を保つもののことである。

$V, W$  の基底をとることで、線形写像は行列で表せるのであった。行列としては何でもありうるわけだが、基底のとり方を上手に選べば、簡単な行列を扱うだけで済むようにできる場合がある。

とくに、 $V = W$  の場合が本講義の主題である。この場合には、 $\mathbf{v}$  と  $A\mathbf{v}$  とを比較できるということが一般の場合と異なる。

一番基本的なのは対角行列である。

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

これらは**基本ベクトルたちをその定数倍に写す** という大事な性質を持つ。

---

本講義では、次のようなことについて学ぶ:

- **計量ベクトル空間** について。
  - 計量ベクトル空間とは、「長さ」と「角度」を扱うことのできるようなベクトル空間である。
  - シュミットの直交化法
  - 直交射影とそれを表す行列
- **正方行列の標準形** について。
  - 固有値と固有ベクトル
  - 行列の対角化 (できる場合。)
  - 弱固有値と弱固有空間
  - 行列のジョルダンの標準形 (一般の場合)