

線形代数学 II [古い] 期末試験的なレポート問題 [去年分]

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は現在暫定版です。間違いがある場合などに予告なしに変更される可能性があります。
- 2023/7/4 17:00 ごろ赤書き部分を追加しました。(それ以前は“A=” なかった)
- 2023/7/4 18:00 ごろ (1) の赤書き部分を訂正。(それ以前は2になっていた。現在は3)
- 2023/7/5 19:00 ごろ (2) の赤書き部分を追加(そう考えるのが普通なのでわかると思います。)
- 2023/7/5 19:00 ごろ (5) の赤書き部分を訂正(それ以前は 1_4 と書いていましたが、 1_5 でした。)
- なお、カラープリンタを用いて無理に対応する必要はありません。もし不明な点があれば、土基までお尋ね下さい。

問題 30.1. 本問では α, β をあなたが選んだ具体的な整数(ただし、 $\alpha \neq \beta$ を選んで解答の最初に明記した上で、 α, β にそれらの整数をあてはめた上で解答せよ。解答には α, β を含まないように、30名程度の解答者の中で、おなじ数の組が選ばれないように留意すること。

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

とおく。以下、[要約]系 11.1 の方針に追随する。(番号は必ずしも対応していない。) が、解答は必ずしも講義でやった(補題 11.5 に沿った)方針で行う必要はない。

- (1) $a(X)(X - \alpha)^2 + b(X)(X - \beta)^3 = 1$ を満たす $a, b \in \mathbb{C}[X]$ の例を求めなさい。
- (2) (1) の a に対して、 $P = a(A)(A - \alpha 1_5)^2$ を求めよ。
- (3) (2) の P に対して、 $P^2 = P$ を確認せよ。
- (4) (3) の P に対して、Image P の基底をうまくとり、 A (AP としても同じ) が Image P 上 標準形であるようにせよ。
- (5) (必要なら $Q = 1_5 - P$ に対して同じことを考え、) A のジョルダンの標準形を上のことにも沿ってもとめよ。