

やってみよう問題 No.5 の (2) について、過去に質問が出たことがあるので答えておく。

$v_2$  を  $U_1$  方向と  $U_1^\perp$  方向に分解する。

$$v_2 = (v_2)_{U_1} + (v_2)_{U_1^\perp} \quad ((v_2)_{U_1} \in U_1, (v_2)_{U_1^\perp} \in U_1^\perp)$$

$$U_1 = \mathbb{R}v_1 (= \mathbb{R}w_1)$$

で、与えられたベクトルの内積を計算すると  $(v_1 \cdot v_2) = 0$  すなわち

$$v_1 \perp v_2$$

であるから、じつは  $v_2 \in U_1^\perp$  で、したがって

$$(v_2)_{U_1^\perp} = v_2, \quad (v_2)_{U_1} = \mathbf{0},$$

であることがわかる。こっちのほうが正統で、まっとうな理解ではあるのだが、ある年度の講義の方ではもう一つべつのやり方で説明したのでそちらについても述べておく。

$U_1$  は一次元で、 $w_1$  で生成されるのだから、ある  $\lambda \in \mathbb{R}$  が存在して、

$$v_2 = (v_2)_{U_1} + (v_2)_{U_1^\perp} = \lambda w + (v_2)_{U_1^\perp}$$

両辺と  $w$  との内積をとると、 $(w \cdot v_2) = \lambda$ 。先程述べたようにこの問題では  $(w \cdot v_2) = 0$  であるから、

$$(v_2)_{U_1} (= ((w \cdot v_2)w)) = \mathbf{0}, \quad (v_2)_{U_1^\perp} = v_2$$

である。

同じような議論で、次が得られる。

**定理 0.1.**  $U$  が  $V$  の有限次元部分ベクトル空間で、その正規直交基底が  $w_1, w_2, \dots, w_k$  で与えられたとすると、 $v = (v)_U + (v)_{U^\perp}$  と  $v$  を  $U$  方向と  $U^\perp$  方向に分けて書いたときの  $U$ -成分は

$$v_U = (v \cdot w_1)w_1 + (v \cdot w_2)w_2 + (v \cdot w_3)w_3 + \cdots + (v \cdot w_k)w_k$$

であたえられる。(したがってまた(当然ながら)

$v_{U^\perp} = v - ((v \cdot w_1)w_1 + (v \cdot w_2)w_2 + (v \cdot w_3)w_3 + \cdots + (v \cdot w_k)w_k)$  である。)

**証明.**  $U$  の元  $v_U$  を  $U$  の基底  $\{w_i\}_{i=1}^k$  を用いて

$$v_U = \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i$$

と書いておく。

$$v = (v)_U + (v)_{U^\perp} = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \cdots + \lambda_k w_k + (v)_{U^\perp}$$

2

の両辺と  $v$  との内積をとれば  $\lambda_i = (v \cdot w_i) (\forall i)$  がわかる。  $\square$