

[略解] 線形代数学 II 中間試験的なレポート問題 [解答例]

出席番号、名前： _____

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は現在暫定版です。間違いがある場合などに予告なしに変更される可能性があります。

問題 241.1. 不定元(変数) x に関する 3 次以下の実係数の多項式の全体を V とおく。つまり

$$V = \{c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3; c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

この V に

$$(f \bullet g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (f, g \in V)$$

で内積 (\bullet) を定める。

- (1) $\{1, x, x^2, x^3\}$ から始めてシュミットの直交化法を用いて V の正規直交系を作りなさい。

(略解) 直交系の一つは

$$1, 1 - 2x, 1 - 6x + 6x^2, 1 - 12x + 30x^2 - 20x^3$$

である。(シュミットの直交化法を真面目にやればこれらを最高次の係数で割ったものがでてくる。つまり大抵の人がはじめに得る答えは

$$1, -\frac{1}{2} + x, \frac{1}{6} - x + x^2, -\frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3$$

である。が上のように分母を払ったほうがラクであろう。)

(いずれにしても、) それらのノルムで割った正規直交系は

$$1, \sqrt{3}(1 - 2x), \sqrt{5}(1 - 6x + 6x^2), \sqrt{7}(1 - 12x + 30x^2 - 20x^3)$$

である。

- (2) V から V への線形写像 H を

$$H(f) = \frac{d}{dx} \left((x^2 - x) \frac{d}{dx} (f) \right)$$

で定義する。このとき、 H はつぎの性質を満たすことを示しなさい。

$$(H(f) \bullet g) = (f \bullet H(g)) \quad (\forall f, g \in V)$$