環論 期末試験的なレポート問題 略解

- 問題は致命的な出題間違いがあった際には予告なく変更される可能性があります。ご注意ください。
- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- もちろん、すべての解答に「理由も書くこと」は必須です。
- 環の準同型定理・ガウスの補題以外の講義中に説明した定理 (命題等) が必要ならばその定理 (命題等) の証明も書くこと。
- (略解の注意) 以下はあくまで略解であるので、この通りに書いたとしてもそんなに点数は期待できません。細かいところまでキチンと (理解した上で) 書いて、はじめて解答としての意味を持ちます。

問題 23.1. 次の各々の命題を証明しなさい。

(1) $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{m}{2^l 3^k}; l, m \in \mathbb{Z}; k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を示しなさい。
($\mathbb{Z}[\frac{1}{6}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{m}{2^l 3^k}; m \in \mathbb{Z}; k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とすべきでした。(そのほうがキレイなので。訂正というほどでもないのですが、どちらで解いても ok とします。(2024/1/26 追記))

(2) $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, X]/(3X-1) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$ を証明しなさい。

問題 23.2. $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ を $f(X) = X^5 - X^4 - 2X^2 + X + 1$ で定義する。$\alpha \in \mathbb{C}$ を $f(\alpha) = 0$ を満たす複素数とする。

(3) 環の準同型 $\varphi : \mathbb{Q}[X]/(f(X)) \to \mathbb{Q}[\alpha]$ が

$$\varphi(\overline{p(X)}) = p(\alpha) \quad (\forall p(X) \in \mathbb{Q}[X])$$

で定まることを示しなさい。ただし $\overline{p(X)}$ は $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ の $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ でのクラスを表す。

(4) φ は同型だろうか?

(5) $\mathbb{Q}[X]/(f(X)$ を体の~~直和~~直積に分解しなさい。(2024/1/24 訂正: 講義では「直積」と言っていたのでここは「直積」で通すべきでした。)

[厳密には (4) には 2 つのケースが考えられる。どちらの場合も考えるのが解答としては望ましい。]

[略解]
(1)

- 等号が 2 つあるのだから、 2 つのことを証明せねばならないことに注意。
  - $1/6 = (1/2)\cdot(1/3) \in \mathbb{Z}[1/2, 1/3]$ により、$\mathbb{Z}[1/6] \subset \mathbb{Z}[1/2, 1/3]$.
  - 逆に、$1/2 = 3 \cdot (1/6) \in \mathbb{Z}[1/6]$, $1/3 = 2 \cdot (1/6) \in \mathbb{Z}[1/6]$ であるから、$\mathbb{Z}[1/6] \supset \mathbb{Z}[1/2, 1/3]$.

  よって、$\mathbb{Z}[1/6] = \mathbb{Z}[1/2, 1/3]$ である。 $\Longrightarrow$ 一番目の等号
- $S = \{\frac{m}{2^l 3^k}; m \in \mathbb{Z}; k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とおく。$\mathbb{Z}[1/6] = S$ を示そう。
  - S は加減法、乗法について閉じていることがわかる (CHECK!).
  - $1/2 \in S$, $1/3 \in S$ $\therefore$ (上のことと併せて) $\mathbb{Z}[1/2, 1/3] \subset S$.
  - 逆もすぐにわかる (CHECK!).

上の CHECK に当たるところはもちろん、他のところも意味がわかって書いてほしいところである。過去問の略解につられて意味もわからず間違いを平気で写すなんざ、落語「本膳」じゃあるまいし...

(2) ポイントは $\mathbb{Z}[1/2, X]$ の任意の元が

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \exists a_0, \ldots, \exists a_n \in \mathbb{Z}[1/2])$$

と書けるところであろう。(この事実自体は (1) と同様にしてわかる。) つまりこの元は環 $\mathbb{Z}[1/2]$ を係数とする多項式とみなすことができて、その意味で $a(X)$ という記号でかくことも許されるということである。あとは去年の解答とおなじであるから省略する。(ちなみに「任意の...」($\forall$) と 「ある...」($\exists$) の使い分けも、それが間違っていたら全答案 0 点にしようかと思うぐらい重要である。本小問の略解ではそれぞれ一箇所づつ使われている。どうしてどちらが使われているかがわかるだろうか?)

(3) 定石通り。

(4) 同型ではない。$g(X) = X^4 - 2X - 1$ とおくと、$f(X) = (X-1)g(X)$ で、α が 1 に等しいケースと, g の根のケースに分けられるが、

- $\alpha = 1$ のケースで言えば、

  $$\varphi(\overline{X-1}) = 0$$

  だが、$\overline{X-1} \neq 0$ だから、φ は単射ではない。
- α が g の根のケースには、

  $$\varphi(\overline{g(X)}) = 0$$

  だが、やはり $\overline{g(X)} \neq 0$ だから φ は単射ではない。

何だったら両方のケースをまとめて議論してもいいところであるが、それ以前に「同型である」と誤った結論を出している解答が多くて閉口した。本来だったら 剰余環の定義に即して、２つのケースのそれぞれを正しく吟味してほしいところであった。

(5)

◎ $g(X)$ は既約である。

($\because$) ガウスの補題 により、$\mathbb{Z}$ 上既約か否かのみを調べればいい。g が $\mathbb{Z}$ 上可約であるとすると、２つの場合がありうる。

- 一次の因数がある場合。この場合 g は 整数を根に持つことになり、その整数は ± 1 のいづれかである。実際代入してみると、この可能性が否定される。
- 一次の因数がない場合。残る可能性は

  $$g(X) = (X^2 + aX + 1)(X^2 - aX - 1) \qquad (a \in \mathbb{Z})$$

  のみである ((二次式) $\times$ (二次式) で展開したときの定数項と 3 次の項を吟味すればこれしか無いことがわかる。) が、実際計算してみると

  $$(X^2 + aX + 1)(X^2 - aX - 1) = X^4 - (aX + 1)^2$$

  でこれは g と等しくなりえない。つまりこの可能性も否定される。

◎ $\gcd((X-1), g(X)) = 1$ であるから、命題 13.3 により、

$$\mathbb{Q}[X]/f(X) \cong \mathbb{Q}[X]/(X-1) \times \mathbb{Q}[X]/(g(X)) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[X]/(g(X))$$

g は $\mathbb{Q}$ 上既約であったから、定理 11.10 により $\mathbb{Q}[X]/(g(X))$ は体である。