理工系線形代数学 NO.13
2023年度の練習問題 (と略解)

問題 13.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

とおく。A を $V = \mathbb{R}^4$ から $W = \mathbb{R}^4$ への線型写像と同一視する。このとき、

(1) A を行基本変形して、階段行列 (仮に B とおく) にせよ。(経過も書くこと。)
(2) 単位行列 E_4 (講義では 1_4 と書いていたこともありました。どちらも同じ意味です。) に上の (1) と全く同じ行基本変形をして、得られた行列を Q とおく。Q と QA を求めよ。
(3) $\mathrm{Ker}(A)$ を求めよ。
(4) $\mathrm{Image}(A)$ を求めよ。
(5) この場合の次元等式 $\dim V - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Image}(A))$ を具体的な数字を入れて完成せよ。

(略解)
(1)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

他には

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

など、解の候補は複数ある。

$$QA = B$$

(3)

$$\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbb{v} \in \mathbb{R}^4; A\mathbb{v} = 0\} = \{\mathbb{v} \in \mathbb{R}^4; QA\mathbb{v} = 0\} = \mathrm{Ker}(B)$$

$$\mathrm{Ker}(B) = \{\mathbb{v} \in \mathbb{R}^4; B\mathbb{v} = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} ; v_1 - 2v_3 + v_4 = 0 \text{ and } v_2 + 3v_3 + 2v_4 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 2v_3 - v_4 \\ -3v_3 - 2v_4 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} ; v_3, v_4 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

つまり、 $\mathrm{Ker}(A)$ は ${}^t[2, -3, 1, 0], {}^t[-1, -2, 0, 1]$ の線形結合からなる 2 次元のベクトル空間である。これは A の列ベクトルに次のような 2 つの一次の関係式があることを示している。

$$2.\mathbb{w}_1 - 3.\mathbb{w}_1 + 1.\mathbb{w}_3 + 0.w_4 = 2. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 3. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1. \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + 0. \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 0.$$

$$-1.\mathbb{w}_1 - 2.\mathbb{w}_2 + 0.\mathbb{w}_3 + 1.\mathbb{w}_4 = -1. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0. \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + 1. \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 0.$$

(4)

$$\mathrm{Image}(A) = \{A\mathbb{v}; \mathbb{v} \in V\} = \{\mathbb{w}_1.v_1 + \mathbb{w}_2.v_2 + \mathbb{w}_3.v_3 + \mathbb{w}_4.v_4; v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}\}$$

で、これでもよいのであるが、実際には $\{\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2, \mathbb{w}_3, \mathbb{w}_4\}$ は関係式がある (一次独立ではない) ので、その分減らすことができて、

$$\mathrm{Image}(A) = \{A\mathbb{v}; \mathbb{v} \in V\} = \{\mathbb{w}_1.v_1 + \mathbb{w}_2.v_2; v_1, v_2, \in \mathbb{R}\}.$$

(5) A の列ベクトルの数 ($\dim(V)$) のうち、核で潰れる分 ($\dim(\mathrm{Ker}(A))$) を差し引いたものが像の次元 ($\dim(\mathrm{Image}(A))$) であるから、

$$\begin{array}{ccccc} \dim V - & \dim\ (\mathrm{Ker}(A)) & = & \dim(\mathrm{Image}(A)) \\ 4 - & 2 & = & 2 \end{array}$$

これが (この問題の場合の) 次元定理である。