

## 理工系線形代数学 NO.7 要約

今日のテーマ: 行列式 (2) 余因子と余因子行列

今回は、行列  $A$  を

$$A = (a_{ij})_{ij}$$

と成分表示する。すなわち  $A$  の  $i$  行  $j$  列の成分 ( $(A)_{ij}$  と書いているやつ) を  $A$  の小文字  $a$  を使って、 $a_{ij}$  と表記することにする。

**定義 7.1.** 行列  $A$  が与えられた時、その  $i$  行と  $j$  列を引っこ抜き、その行列式をとってついでに符号  $(-1)^{i+j}$  をつけたものを  $A$  の余因子 (より正確には、 $ij$ -余因子) といい、 $A_{ij}$  で書き表す。

(※)  $A_{ij}$  と  $(A)_{ij}$  とは全く意味が違うので注意。

**補題 7.2.**  $A$  の 1 列目が基本列ベクトル  $\mathbf{e}_i$  に等しいならば、 $\det(A) = A_{i1}$ . (もっと一般に、 $A$  の  $j$  列目が  $\mathbf{e}_i$  に等しいならば、 $\det(A) = A_{ij}$ .)

補題 7.2 を踏まえて、余因子は別の言い方をしたほうが分かりやすいかも知れない:

**補題 7.3.** 一般の行列  $A$  に対して

$$\det(A \leftarrow_j \mathbf{e}_i) = A_{ij}$$

**命題 7.4** (行列式の 1 列目に関する展開). 任意の  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して、

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1}$$

が成り立つ。

*Proof.*  $A$  の 1 列目は  $\sum_i a_{i1} \mathbf{e}_i$  と等しいから、

$$\det(A) = \det(A \leftarrow_1 (\sum_i a_{i1} \mathbf{e}_i)) = \sum_i a_{i1} \det(A \leftarrow_1 \mathbf{e}_i) = \sum_i a_{i1} A_{i1}$$

□

上の命題と同様にして、2 列目、3 列目、...  $n$  列目に関する展開が得られる。

$A$  の  $k$  列目を  $\mathbf{v}_k$  と書こう。交代性により、 $k = 2, 3, \dots, n$  に対して  $\det(A \leftarrow_1 (\mathbf{v}_k)) = 0$  である。このことから、つぎの結果を得ることができる。

**命題 7.5.** 任意の  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して、

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} A_{i1} = 0 \quad (k = 2, \dots, n)$$

が成り立つ。

これもまた、1 列目だけについて特別に言えることではなく、結局次のことが言える:

**命題 7.6.** 任意の  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して、

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} A_{mj} = \delta_{km} \det(A) \quad (\forall k, \forall m \in \{1, 2, \dots, n\})$$

が成り立つ。

この式は次のことを意味している:

**命題 7.7.** 任意の  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して、各  $ij$  成分が  $A$  の余因子  $A_{ji}$  であるような行列 ( $i, j$  の順番に注意。) を  $\tilde{A}$  と書くことにする。 ( $\tilde{A}$  のことを  $A$  の余因子行列とよぶ。 ) このとき、

$$A\tilde{A} = \det(A) \cdot 1_n$$

**系 7.1.**  $n$  次正方行列  $A$  が逆行列を持つことと、 $\det(A) \neq 0$  とは同値である。

(注意) 命題 7.7 は逆行列の定義 (定義 5.1) の半分しか確かめていない。念のためもう片側も確かめておこう。

そのために行列  $A$  の転置行列  ${}^tA$  を  $({}^tA)_{ij} = (A)_{ji}$  で定義する。  
 ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$  等々の性質が成り立つ。(教科書 p.14 参照)

$\det({}^tA) = \det(A)$  であり (このことの説明も必要だが、教科書の p.52 もしくはネットを参照のこと。),

$${}^tA\tilde{A} = \det({}^tA) \cdot 1_n = \det(A) \cdot 1_n$$

両辺の転置行列を考えると

$${}^t({}^t\tilde{A})A = \det A \cdot 1_n$$

$\det(A) \neq 0$  なら  $B = (\det A)^{-1} \cdot \tilde{A}$ ,  $C = (\det A)^{-1} \cdot {}^t({}^t\tilde{A})$  とおいて、

$$AB = 1_n, CA = 1_n$$

となる正方行列  $B, C$  があることがわかった。

$$B = 1_n \cdot B = (CA)B = C(AB) = C \cdot 1_n = C$$

であるから、 $B = C$  であって、これが  $A$  の逆行列である。