理工系線形代数学 NO.6 要約

今日のテーマ: **行列式**

定義 6.1. (符号) $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列 σ が与えれらているとする。$1, 2 \dots, n$ を平面上に一直線上に並ぶように等間隔で並べて描き、その下にも 同じもののコピーを掻いておく。1 と $\sigma(1)$,2 と $\sigma(2)$,..., n と $\sigma(n)$ とをそれぞれなめらかな曲線で結ぶ。(ただし三曲線が一点に会さないようにする。) このとき、曲線同士の交点の数の総数を n とおくと、

$$(-1)^n$$

は σ にしかよらない。この数を $\mathrm{sgn}(\sigma)$ と書いて、σ の符号と呼ぶことにする。

定義 6.2. 正方行列 A に対して、

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdot \cdots \cdot a_{n-1\sigma(n-1)} a_{n\sigma(n)}$$

(和は $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列 σ 全てに渡る) のことを A の行列式という。

定義 6.3. $n \times 1$-行列のことを、n 次元列ベクトルともいう。行列 A と列ベクトル $\mathbb{b}$ に対して、$A \lessdot|_i \mathbb{b}$ で「A の i 番目の列ベクトルを $\mathbb{b}$ に置き換えて得られる行列」を表すことにする。(ここだけの記号。)

命題 6.4. det について、以下のことが成り立つ。

(1) det は**多重線形**である。すなわち、任意の正方行列 A、任意の n 次元列ベクトル $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ と任意の実数 c_1, c_2、任意の $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ にたいして、

$$\det(A \lessdot|_i (c_1 \mathbb{u} + c_2 \mathbb{v})) = c_1 \det(A \lessdot|_i \mathbb{u}) + c_2 \det(A \lessdot|_i \mathbb{v})$$

が成り立つ。

(2) det は**交代的**である。すなわち、A の列ベクトルに同じものが現れたなら、必ず $\det(A) = 0$ である。

(2′) det は符号交代的である。すなわち、行列 A の 2 つの列をいれかえた行列を A' と書いたとき、 $\det(A) = -\det(A')$ が成り立つ。

(3) $\det(1_n) = 1.$

逆に、多重線形かつ交代的な写像 $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ が与えられたとき、$f(A) = f(1_n) \det(A)$ が成り立つ。

注意: 多重線形性 (1) の仮定のもとで、交代性 (2) と符号交代性 (2′) とは同値である。