

微分積分学概論やってみよう問題 NO.12

出席番号、名前： _____

問題 12.1. 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数 f は最大値をもつこと (最大値の定理) を証明しよう。

$M = \sup_{x \in [0, 1]} f(x)$ と置く。ここでは f が有界であること、すなわち $M < \infty$ を仮定して証明することにする。[f が有界でないかもしれない場合にどうするかは、本問の議論と同様なことを繰り返すこともできるし、そのような二度手間を減らすためのいくつかの手段も知られているが、ここでは割愛する。]

以下、問題にしている閉区間を半分に切って、 $\sup_{x \in I_n} f(x) = M$ となる区間を取り出すことを繰り返す。次の各問に答えなさい。

(1) 区間の列 $I_0 = [0, 1] \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ で、

$$|I_n| = 2^{-n}, \quad \sup_{x \in I_n} f(x) = M$$

を満たすものが存在することを示しなさい。

(2) 各正整数 n に対して、 $\exists Q_n \in I_n$ で $M - 1/n < f(Q_n) \leq M$ を満たすものが存在することを示しなさい。

(3) Q_n は収束し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(Q_n) = M$ であることを示しなさい。

(4) f は $[0, 1]$ で最大値をもつことを示しなさい。:

問題 12.0.1. 一行感想を述べてください。

答:

答えは下の線より下にかくこと。多い場合は裏にまわっても良い。