微分積分学概論中間試験的な問題 NO.40 解答

出席番号、名前：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 40.1. 次の各問に答えなさい。([(1) と (2) とには直接の関連性はありません。あしからず。)

(1) つぎの各命題 P について、(あ) 否定命題 ((not) P) を書き、(い)P と (not) P のいずれか正しい方を証明しなさい。
   (a) $P_1 = (\forall x \in \mathbb{R}\ ((x^2+1) > 0))$.
   (b) $P_2 = (\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \exists y \in \mathbb{R}_{>0} (x > y > 0))$.
   (c) $P_3 = (\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} (x + y > z))$.

(2) $\{a_n\}$ が収束列のとき、$\{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} a_k\}_{n=1}^\infty$ はコーシー列であることを示しなさい。

なお 上で、 $(x > y > 0)$ は $((x > y)$ and $(y > 0))$ と考えるのが分かりやすいかもしれません。

---

(1) (a) (あ) not $P_1 = (\exists x \in \mathbb{R}((x^2+1) \leq 0))$.
(い)P_1 が正しい。(No.1 補足のように場合分けをすれば良い。。)
(b) (あ) not $P_2 = (\exists x \in \mathbb{R}_{>0} \forall y \in \mathbb{R}_{>0} (x \leq y))$
(い)P_2 が正しい。 (任意の $x > 0$ に対して $y = x/2$ とおけばよい。)
(c) (あ) not $P_3 = \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} x + y \leq z$.
(い)not P_3 が正しい。
$x = 0$ とおけば, 任意の $y \in \mathbb{R}$ にたいして $z = y$ と置けば $x + y = y = z$ である。

(2) $\{a_n\}$ は収束列であるから、有界である (Th.3.4)。つまり、

$$\exists M > 0 \forall n > 0 |a_n| \leq M.$$

任意の $\epsilon > 0$ に対して、$N = (\lfloor 1/\epsilon \rfloor + 1)(\lfloor M \rfloor + 1)$ と置けば、任意の $n > m > N$ に対して、

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} a_k - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left| \frac{1}{2^k} a_k \right|$$
$$= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} M = 2(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}) M \leq 2(\frac{1}{2^n}) M \leq \frac{1}{n} M < \epsilon$$

よって $\{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} a_k\}$ はコーシー列である。 □