

一様連続性

$X \subset \mathbb{R}$ とする。 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が X 上で連続であるのは

$$\forall a \in X \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

を満たすときに言うのであった。 δ は $\epsilon > 0$ と a に依存して良いということに注意する。

定義 15.1. $X \subset \mathbb{R}$ とする。 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が X 上で**一様連続**であるとは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in X \forall x \in X (|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

を満たすときに言う。

一様連続性を言うためには、 δ は ϵ だけに依存し、 a が X を動きまわっても変わらないように取らなければならないという点に注意する。

例題 15.2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^5$ により定める。このとき、以下の間に答えなさい。

- (1) f は 任意の $a \in \mathbb{R}$ において連続であることを定義に従って示しなさい。
- (2) f は $[-10, 10]$ において一様連続であることを定義に従って示しなさい。

上の例題の f は任意の $M > 0$ について、 $[-M, M]$ において一様連続だが、 \mathbb{R} においては一様連続ではない。このように一様連続性では定義域がどれであるかが大変大事である。