微分積分学概論要約 NO.12

連続関数の性質

定理 12.1. (中間値の定理) (再) 関数 f が閉区間 $[a,b]$ で連続 (すなわち、$[a,b]$ の各点で連続) とする。このとき $f(a)$ と $f(b)$ の中間の値 γ にたいして、$f(c)=\gamma$ をみたすような $c \in [a,b]$ が存在する。

定理 12.2 (最大値の定理)**.** 有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数は必ず最大値を持つ。

この定理は位相空間論においては「コンパクト集合の連続写像による像はコンパクトである」という定理 (あるいはその系の「コンパクト集合上の連続関数は最大値を持つ」という定理) に一般化される。

問題 12.1. 閉区間 $[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数 $f(x)$ が、任意の $x \in [0,1]$ において $f(x) \neq 0$ を満たしたとする。このとき、ある $\epsilon_0 > 0$ が存在して、

$$\forall x \in [0,1] \text{ にたいして } |f(x)| > \epsilon_0$$

を満たすことを証明しなさい。