微分積分学概論要約 NO.7

第7回目の主題：$\boxed{\text{級数}}$

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、形式的な和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

のことを**級数**とよぶ。このように形式的に決めたからと言って、その「値」が何もせずに決まるわけではない。上の級数について、

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

で定義される s_n のことをこの級数の**部分和**と呼ぶ。部分和からできた数列 $\{s_n\}$ が収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty} s_n \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n\right)$$

で定義される数をこの級数の**和**と呼ぶ。

定義 7.1. 各 a_n が 0 以上の時の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ のことを**正項級数**とよぶ。

有界な単調列は収束することから、次のことが分かる。

命題 7.2. 正項級数は、部分和からなる列が有界ならば必ず収束する。

正項級数に限らない級数については、絶対収束の概念が大事である。

定理 7.3. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば収束する。

定義 7.4. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、**絶対収束**すると呼ばれる。

「絶対収束する」というのはひとまとまりでひとつの数学用語である。あえて言えば「絶対値の和が収束している」という言葉の省略に近い。「絶対に収束する」という言葉とはまったく異なる。

定理 7.5 (定理 7.3 の言い換え)**.** 絶対収束する級数は収束する。

正項級数に限らずこの定理が成り立つということに特別の注意が必要かもしれない。これは [コーシー列は収束列である] という定理 (実数の完備性) に基づいていることに注意する。

例 7.6. 任意の実数 r に対して、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} r^k$$

は収束する。この和を $\exp(r)$ と書く。

問題 7.1. 数列 $\{a_n\}$ が、任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、

$$|a_n| < \frac{1}{2^n}$$

を満たしているとする。このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束することを示しなさい。