線形代数学 II 中間試験的なレポート問題

出席番号、名前：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は現在暫定版です。間違いがある場合などに予告なしに変更される可能性があります。

問題 20.1. 不定元 (変数) x に関する 3 次以下の実係数の多項式の全体 を V とおく。つまり

$$V = \{c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3; c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

この V に

$$(f \bullet g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \qquad (f, g \in V)$$

で内積 $(? \bullet ?)$ を定める。

V から V への線形写像 H を

$$H(f) = \frac{d}{dx}\left((x^2-1)\frac{d}{dx}(f)\right)$$

で定義する。このとき、以下の各問いに答えなさい。

(1) H はつぎの性質を満たすことを示しなさい。

$$(H(f) \bullet g) = (f \bullet H(g)) \qquad (\forall f, g \in V)$$

(答)

部分積分を用いる。

$$\begin{aligned}
(H(f) \bullet g) &= \int_{-1}^{1} H(f)g \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left((x^2-1)f'\right)g \\
&= \left[\left((x^2-1)f'\right)g\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\left((x^2-1)f'\right)g' \\
&= 0 - \int_{-1}^{1}\left((x^2-1)f'\right)g' \\
&= -\int_{-1}^{1}(x^2-1)f'g'
\end{aligned}$$

最後の式は f, g について対称である。したがって $(H(f) \bullet g) = (f \bullet H(g))$. □

(別解) 多項式 $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ に対応する V のベクトルを ☆ $= \{1, x, x^2, x^3\}$ を基底として表現したベクトルを $\mathbb{v}_f$ と書くことにする。つまり

$$\mathbb{v}_f = \mathbb{v}_{(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

である。この基底 ☆ を用いて • の Gram 行列を書こう。

$$A_{ij} = \mathbb{v}_{x^{i-1}} \bullet \mathbb{v}_{x^{j-1}} = \int_{-1}^{1} x^{i+j-2} dx = \frac{1}{i+j-1} [x^{i+j-1}]_{-1}^{1}$$

であるから、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

である。これは (やってみよう問題 No.2 で説明したように)

$$(f \bullet g) = {}^t\mathbb{v}_f A \mathbb{v}_g$$

を意味している。

つぎに、H を基底 ☆ をつかって表現すると、H の定義に従った素朴な計算により、

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

がわかる。$(H(1), H(x), H(x^2), H(x^3)$ を基底 ☆ で書いて横に並べれば良い。) これは

$$\mathbb{v}_{H(f)} = B\mathbb{v}_f$$

という意味である。

$$\begin{aligned} (H(f) \bullet g) &= {}^t(\mathbb{v}_{H(f)}) A \mathbb{v}_g = {}^t(B\mathbb{v}_f) A \mathbb{v}_g = {}^t\mathbb{v}_f {}^tBA\mathbb{v}_g \\ (f \bullet H(g)) &= {}^t(\mathbb{v}_f) A \mathbb{v}_{H(g)} = {}^t(\mathbb{v}_f) AB \mathbb{v}_g \end{aligned}$$

であって、実際計算してみると、

$${}^tBA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{16}{15} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{36}{35} \end{pmatrix} = AB$$

が確かめられる。 □

[別解] は V の次元が上がるにつれ計算がうるさくなるという欠点があって、はじめの解答のほうが簡潔でもある。ただし、行列で実際に書いたほうがなにをやっているかわかりやすいという御仁もいらっしゃろう。

(2)

$$p_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n .((x^2-1)^n) \quad (n=0,1,2,3)$$

とおく。p_n は H の固有ベクトルであることを示しなさい。(それぞれの対応する固有値はいくらか?)
(答) 定義に従って計算すると $p_0(x) = 1, p_1(x) = 2x, p_2(x) = 12x^2-4, p_3(x) = 120x^3-72x, p_4(x) = 1680x^4-1440x^2+144$ である。それぞれに H を施した結果を書いてみると

$$\begin{aligned}
H(p_0) &= H(1) = 0 = 0p_0 \\
H(p_1) &= H(2x) = 4x = 2p_1 \\
H(p_2) &= H(12x^2-4) = 72x^2-24 = 6p_2 \\
H(p_3) &= H(120x^3-72) = 1440x^3-864x = 12p_3
\end{aligned}$$

したがって、p_0, p_1, p_2, p_3 はそれぞれ固有値 $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 12$ に対応する固有ベクトルである。

(別解) 定義により、

$$\begin{aligned}
p_n &= \partial^n .((x^2-1)^n) \\
&= \partial^n (\sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^{2k}) \\
&= n!(\sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{2k}{n} x^{2k-n}) \\
&= n!\left(\sum_k (-1)^{n-k} \binom{2k}{k, n-k, 2k-n} x^{2k-n}\right) \\
&= n!(\sum_k (-1)^{n-k} a_{k,n} x^{2k-n})
\end{aligned}$$

以下、$\frac{1}{n!}p_n$ のことを q_n と書くことにする。

$$q_n = (\sum_k (-1)^{n-k} a_{k,n} x^{2k-n})$$

ただし、ここで

$$a_{k,n} = \binom{2k}{k, n-k, 2k-n} \quad (= \binom{n}{k}\binom{2k}{n})$$

は「多項係数」である。(wikipedia あたりで見てね。)

$$(\partial x^2 \partial).q_n = \sum_k (-1)^{n-k}(2k-n)(2k-n+1)a_{k,n}x^{2k} \tag{A}$$

$$\begin{aligned}(\partial\partial).q_n &= \sum_k (-1)^{n-k}(2k-n)(2k-n-1)a_{k,n}x^{2k-2} \\ &\underset{\text{シフト}}{=} \sum_k (-1)^{n-k-1}(2k+2-n)(2k+1-n)a_{k+1,n}x^{2k} \\ &\underset{\text{下記注意}}{=} \sum_k (-1)^{n-k-1}2(2k+1)(n-k)a_{k,n}x^{2k} \end{aligned} \tag{B}$$

ここで

$$a_{k+1,n}((2k+2-n)(2k+1-n)) = 2(2k+1)(n-k)a_{k,n}$$

を用いた。これは次のような感じで計算すればわかる。

$$\begin{aligned} & a_{k+1,n}(2k+2-n)(2k+1-n) \\ &= \frac{(2k+2)!(2k-n+2)(2k-n+1)}{(k+1)!(n-k-1)!(2k-n+2)!} \\ &= \frac{(2k+2)!}{(k+1)!(n-k-1)!(2k-n)!} \\ &= \frac{2(2k+1)\cdot(2k+2)!}{k!(n-k-1)!(2k-n)!} \\ &= \frac{2(2k+1)(n-k)\cdot(2k+2)!}{k!(n-k)!(2k-n)!} \\ &= 2(2k+1)(n-k)a_{k,n} \end{aligned}$$

さて、(A)-(B) を計算すると

$$\begin{aligned}(\partial(x^2-1)\partial)q_n &= \sum_k (-1)^{n-k}((2k-n)(2k-n+1)+2(2k+1)(n-k))a_{k,n}x^{2k} \\ &= \sum_k (-1)^{n-k}(n^2+n)a_{k,n}x^{2k} \\ &= (n^2+n)q_n \end{aligned}$$

つまり、

$$H.q_n = (n^2+n)q_n$$

よって q_n は 固有値 $\lambda_n = (n^2+n)$ に対応する固有ベクトルである。$n!$ 倍して、

$$H.p_n = (\lambda_n)p_n$$

すなわち、p_n は 固有値 $\lambda_n = (n^2+n)$ に対応する固有ベクトルである。

別解のほうが随分と難しくなってしまったが、V の次元 (「何次以下までの多項式を考えるのか」) によらないので若干一般性が高い。なお、別解で見ればわかるように H の p_n に対応する固有値は $\lambda_n = n(n+1)$ でこれは n について単調増加であるため、n が違うごとに λ_n の値は相異なる。(このことははじめの解答の場合には直接見て確認できる。) そのことはつぎの (3) の解答の際に注意して (答案に記載して) おく必要があるだろう。

(3) p_0, p_1, p_2, p_3 はどの 2 つも互いに直交することを示しなさい。

ヒント: (1) の結果で、$f = p_i$, $g = p_j$ とおけばよい。[いいわけ: これは、一般に、(あ) 一つの対称行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交する。ということの証明と同じであって、2023/5/23 以前はそれをヒントとしていたのだが、(あ) は標準的な内積を用いて語られるので、ヒントというよりかえって難しくなってしていた次第。]

(答) i, j を $0 \leq i, j \leq 3$, $i \neq j$ なる整数とする。(1) の結果において $f = p_i g = p_j$ とおくと、

$$(H(p_i) \bullet p_j) = (p_i \bullet H(p_j))$$

(2) により、

$$((\lambda_i p_i) \bullet p_j) = (p_i \bullet (\lambda_j p_j))$$

内積の双線形性により

$$\lambda_i (p_i \bullet p_j) = \lambda_j (p_i \bullet p_j)$$

すなわち

$$(\lambda_i - \lambda_j)(p_i \bullet p_j) = 0$$

(2) から用意に確認できるように、$\lambda_i \neq \lambda_j$ であるから、両辺に $(\lambda_i - \lambda_j)^{-1}$ を掛けることができて、

$$(p_i \bullet p_j) = 0$$

つまり $p_i \perp p_j$ である。

「数学の歴史」という書物の中のどのへんをやっているか

wikipedia で記述のあるような事項をキーワードだけ並べてみました。詳しくはそちらを (もしくは web でググって) 参照ください。

本問題の主題は「直交多項式列」であった。

p_n は (定数倍を除いて) ルジャンドル多項式列と呼ばれている。

ルジャンドル 1752-1833

p_n を本問題のように具体的に与える式は
ロドリゲスの公式 (1816,1827) として知られている。
直交性の 一般論は
スツルム (1803-1855) =リウヴィル (1809-1882) 型微分方程式
として知られている。

日本では:
1853(嘉永 6) ペリーが浦賀に来航
1869(明治 2) 東京に遷都
... 大体明治維新頃ですね.

ロドリゲスの公式がどうして出てくるのか、本格的には超関数 (distribution) の理論が良い説明を与えてくれるかもしれません。

セルゲイ・ソボレフ 1908-1989
ローラン・シュヴァルツ 1915-2002

日本では
昭和 1926-1989
大分と現代に近づいてきました。