線形代数学 II 中間試験的なレポート問題 補足。

問題 20.1 において、(?•?) (この記号の意味は: $(f \bullet g)$ の f, g を露わに書きたくないのでこう書いている) が内積であることを [本来は解答者が各々確認するべきだが、面倒なだけなので] ここでかんたんにチェックしておく。
要約の No.2 の定義 2.1 をチェックすればよい。(教科書 p.132-133 でも本質的には同じである。)
(1) 対称性

$$(f \bullet g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)dx = (g \bullet f)$$

(2) 片方の変数に関する下方性

$$\begin{aligned}(f \bullet (g_1 + g_2)) &= \int_{-1}^{1} f(x)(g_1(x) + g_2(x))dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)g_1(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)g_2(x))dx \\ &= (f \bullet g_1) + (f \bullet g_2)\end{aligned}$$

(3) (2) と同様。
(4)

$$(cf) \bullet g = \int_{-1}^{1} cf(x)g(x)dx = c(f \bullet g) = (f \bullet cg)$$

(5) 正値性

$$(f \bullet f) = \int_{-1}^{1} f(x)f(x)dx = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx \geq 0$$

(積分の正値性。)
正定値性の方:

$$(f \bullet f) = 0 \implies f = 0$$

は若干微積分学の知識を要する。要点を述べれば証明は次の通り。

- $f(x) = x$ は $[-1, 1]$ で連続である。
- $[-1, 1]$ 上の連続関数の和、差、積、スカラー倍はまた $[-1, 1]$ 上連続である。
- したがって、x の多項式はすべて $[-1, 1]$ 上連続である。
- $[-1, 1]$ 上の正値連続関数 φ に対して、$\int_{-1}^{1} \varphi \geq 0$ である。
- $[-1, 1]$ 上の正値連続関数 φ が、ある点 $a \in [-1, 1]$ で $\phi(P) = \epsilon > 0$ をみたせば、ある $\delta \in (0, 1)$ が存在して、$[-1, 1] \cap (a - \delta, a + \delta)$ 上 $\varphi > \epsilon/2$ である。(ϵ-δ 論法)
- 上記のような状況のとき、$\int_{-1}^{1} \varphi > (\epsilon/2)\delta$ である。