

## 体論: 期末試験的なレポート問題

- 言うまでもないことだが、数値的な答だけでは十分ではない。論理的な説明がもっと大事である。
- とくに、「...は既約である。」と書く場合には、理由を添えると加点される。(本題に関係のないことを書いている場合を除く。)
- maxima などの数式処理ソフトを用いてもよいが、肝心なところは自分でチェックや証明をすること。(必須ではないがもし使った場合には使用ソフト名を挙げてください。)
- (2/6 10:50) (4) の下に仮定を追加しました。すみません。
- (2/6 12:30) 上記仮定を (3)(4) にもすることにしました。すみません。

**問題 30.1.**  $a, b \in \mathbb{Z}$  とし、 $b$  は平方数ではないものとする。(平方数の定義は、「ある整数の二乗と等しいような数」とします。)

次の各問いに答えなさい。

- (1)  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{b}]$  の  $\mathbb{Q}$  上の拡大次数を求めなさい。
- (2)  $K$  の元  $a + \sqrt{b}$  が  $K$  の元の平方ならば、 $(a^2 - b)$  は平方数であることを示しなさい。

※以下の小問では  $a^2 - b$  は平方数でないとする。 ※

※さらに以下の小問では  $a, b$  は互いに素で、 $a^2 - b \geq 2$  とする。 ※

問題が難しくなりすぎていたので

以下では必要なら(上の仮定のもとで)  $\mathbb{Q}$  上  $\sqrt{b}, \sqrt{a^2 - b}$  は  $\mathbb{Q}$  上一次独立であることを証明なしに使ってもよい。(もちろん証明もつけていただいてもよいが。)

- (3)  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式  $m(X)$  を求めなさい。
- (4)  $m(X)$  の最小分解体を  $L$  とおく。  $L$  および  $[L : \mathbb{Q}]$  を求めなさい。
- (5)  $L$  の  $\mathbb{Q}$  上のガロア群  $G$  をもとめよ。
- (6)  $L$  の部分体をすべて求めなさい。