

逆関数

**定義 12.1.** 実数のある区間  $I$  で定義された関数  $f$  が狭義単調増加関数であるとは、

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

をみたすときにいう。後半の  $f(x_1) < f(x_2)$  を  $f(x_1) \leq f(x_2)$  に置き換えることにより、(広義)単調増加関数が定義される。

たまに狭義単調増加の条件を「 $f(x) < f(x+1)$ 」と同じと勘違いしている学生を見かける。数列の時の類推であろうが、これはもちろん間違い。 $x(\sin(2\pi x) + 2)$  を考えてみれば良い。(ウラ面の図も参照)

**定理 12.2.**  $f$  が閉区間  $[a, b]$  上の狭義単調増加な連続関数であれば、

$$f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$$

の逆関数

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$$

が存在する。さらに、この  $f^{-1}$  は連続で、かつ狭義単調増加である。

**例 12.3.** 正の整数  $n$  に対して、0 以上の実数を定義域とする関数  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  は連続であり、狭義単調増加である。この関数は全射でもあるから、 $f$  は逆写像を持つ。この関数を

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

と書く。つまり  $y = \sqrt[n]{x}$  は  $y^n = x$  を満たす唯一の正の実数である。

**命題 12.4.** 任意の正の実数  $x$  に対して、

$$\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k$$

がなりたつ。

*Proof.*  $y = \sqrt[n]{x}$  とおくと、定義により、 $y^n = x$ 。

$$(y^k)^n = y^{kn} = (y^n)^k = x^k.$$

ゆえに、 $y^k$  は  $n$  乗して  $x^k$  になる実数である。そのような実数は唯一つ、すなわち  $\sqrt[n]{x^k}$  しかないのであるから、両者は等しい。□

同様にして、次のことが分かる。

**命題 12.5.** 正の整数  $a, b, c, d$  が  $a/b = c/d$  を満たせば、任意の正の実数  $x$  にたいして、

$$\sqrt[b]{x^a} = \sqrt[d]{x^c}$$

がなりたつ。

この命題がなりたつので、 $\sqrt[b]{x^a}$  のことを  $x^{\frac{a}{b}}$  と書いても誤解の恐れがない。

**補題 12.6.** 1 より大きい実数  $x$  と有理数  $q_1, q_2$  にたいして、

$$q_1 < q_2 \implies x^{q_1} < x^{q_2}$$

が成り立つ。

**問題 12.1.** 次のことを示しなさい。

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall q \in \mathbb{Q} (|q| < \delta \implies |2^q - 1| < \epsilon)$$

逆関数の別の例を挙げよう:

**例 12.7.** この例では、高校で習う三角関数の知識は既知であるとする。

- (1)  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni x \mapsto \sin(x) \in [-1, 1]$  は狭義単調増加連続関数である。その逆関数のことを  $\arcsin(x)$  と書く。
- (2)  $[0, \pi] \ni x \mapsto \cos(x) \in [-1, 1]$  は狭義単調減少連続関数である。その逆関数のことを  $\arccos(x)$  と書く。
- (3)  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ni x \mapsto \tan(x) \in \mathbb{R}$  は狭義単調増加連続関数である。その逆関数のことを  $\arctan(x)$  と書く。

$\arcsin, \arccos, \arctan$  はそれぞれ  $\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$  などと書くこともある。

参考までに定義 12.1 の下の注意で述べた  $x(\sin(2\pi x) + 2)$  のグラフを載せておこう。

